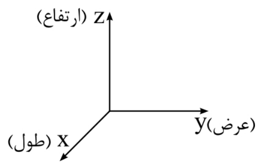
هندسه تحلیلی

فصل اول

1)


نام‌گذاری محورها

2) $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2}$ فاصله‌ی نقطه‌ی M به مختصات (x,y,z) از مبدأ

---

3) فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) از محورها
$$\begin{cases} d = \sqrt{y^2 + z^2} & \text{فاصله از محور } x\text{ها} \\ d = \sqrt{x^2 + z^2} & \text{فاصله از محور } y\text{ها} \\ d = \sqrt{y^2 + x^2} & \text{فاصله از محور } z\text{ها} \end{cases}$$

---

4) فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) از صفحات
$$\begin{cases} d = x \rightarrow (yoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d = y \rightarrow (xoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d = z \rightarrow (xoy) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \end{cases}$$

---

5) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ فاصله‌ی ۲ نقطه به مختصات (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) از هم

---

6) $P : \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$ مختصات وسط پاره خط متصل‌کننده‌ی دو نقطه‌ی

(x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2)

---

7)
$$\begin{cases} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) & \text{محل برخورد ۳ میانه‌ی مثلث} \\ C(x_3, y_3, z_3) \\ G : \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) \end{cases}$$

8) تصویر نقطه‌ی (x,y,z) نسبت به صفحات مختصات

- نسبت به (xoy): $(x, y,$ صفحه $)$
- نسبت به (xoz): $(x,$ صفحه $, z)$
- نسبت به (yoz): $($ صفحه $, y, z)$

---

9) تصویر نقطه‌ی (x,y,z) نسبت به محورهای مختصات

- نسبت به محور xها: (x,o,o)
- نسبت به محور yها: (o,y,o)
- نسبت به محور zها: (o,o,z)

---

10) قرینه = 2× تصویر − نقطه

قرینه: نسبت به محور یا صفحه — تصویر: نسبت به محور یا صفحه

---

11) طول بردار به مختصات $\vec{V}(a,b,c)$: $|\vec{V}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

---

12) ضرب عدد M در بردار: $M\vec{a} = (Ma_1, Ma_2, Ma_3)$

---

13) $|M\vec{a}| = |M||\vec{a}|$

---

14) اگر ۲ بردار (a,b,c) و (a',b',c') موازی باشند $\Rightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

---

15)

- مستطیل: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$
- لوزی: $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$
- تعمیم نکته مستطیل: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |M\vec{a}+n\vec{b}| = |M\vec{a}-n\vec{b}|$

---

16) بردار یکه

$$e_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \times \vec{a} \Rightarrow e_a = \left(\frac{x}{|\vec{a}|}, \frac{y}{|\vec{a}|}, \frac{z}{|\vec{a}|}\right)$$

---

17) $\vec{V} = (a,b,c) \Leftrightarrow \vec{V} = ai + bj + ck$

---

18) $\begin{cases}\vec{i}=(1,0,0)\\ \vec{j}=(0,1,0)\\ \vec{k}=(0,0,1)\end{cases}$

---

19) $u_T=|\vec{a}|\,\vec{b}+|\vec{b}|\,\vec{a}$ (بردار نیمساز بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$)

---

20) ضرب نقطه‌ای (داخلی) $\left.\begin{matrix}a(x,y,z)\\ b(x',y',z')\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=(xx'+yy'+zz')$

---

21) $a.b=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (θ:زاویه بین a و b)

---

22) ۳ اتحاد ضرب داخلی $\begin{cases}|\vec{a}\pm\vec{b}|=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\pm 2\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\pm 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\ (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\\ (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})\end{cases}$

---

23) $e_a.e_b=\dfrac{\vec{a}}{|a|}.\dfrac{\vec{b}}{|b|}$

---

24) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

---

25) $\vec{a}.\vec{o}=0$

26) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

27) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$

28) $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})\rightarrow$ بی‌معنی

29) $\overline{|\vec{a}.\vec{b}|}\le|\vec{a}||\vec{b}|$ نامساوی کشی شوارتز

30) $(r\vec{a}).\vec{b}=\vec{a}.(r\vec{b})=r(\vec{a}.\vec{b})$ r عددی متعلق به R

31) $i.i=j.j=k.k=1$

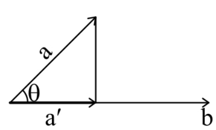
32) $a:(a_1,a_2,a_3) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{i}=a_1 \\ \vec{a}.\vec{j}=a_2 \\ \vec{a}.\vec{k}=a_3 \end{cases}$

---

33) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}=0 \\ \text{یا} \\ \vec{a} \perp (\vec{b}-\vec{c}) \\ \text{یا} \\ \vec{b}=\vec{c} \end{cases}$

---

34)



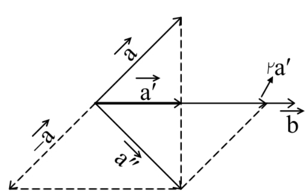
$$|\vec{a'}|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

---

35) $\vec{a'}=\left(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right).b$ ($\vec{a'}$: تصویر $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

(قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

36)



$$\vec{a''}=2\vec{a'}+(-\vec{a})$$

$\vec{a'}$: تصویر $\vec{a}$

$\vec{a''}$: قرینه‌ی $\vec{a}$

---

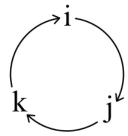
37) $a'.a''=a.a'=|a'|^2$

➢ ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$:

38) $\begin{cases} \vec{a}(x,y,z) \; \vec{a}\times\vec{b} \\ \vec{b}(x',y',z') \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$

---

39) $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

40) $\begin{cases} i\times j=k \\ j\times k=i \\ k\times i=j \end{cases}\Rightarrow$ 

➢ ویژگی‌های ضرب خارجی:

41) $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$

42) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

43) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$

44) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

45) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$

46) $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}$ یا $\vec{b}=0$

47) $r(\vec{a}\times\vec{b})=r\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(r\vec{b})$

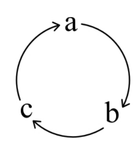
48) $\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$ توزیع‌پذیری دارد

49) $(\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$ توزیع‌پذیری دارد

50) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ شرکت‌پذیری ندارد

51) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

---

52) اگر برای ۳ بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ داشته باشیم $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ $\Rightarrow a\times b=b\times c=c\times a$ 

---

53) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$

①
②

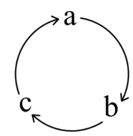
➢ ضرب مختلط:

54) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|.\sin\alpha.\cos\theta$

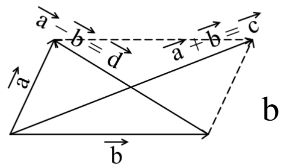
زاویه بین $\vec{c},\vec{b}$ — زاویه بین $(b\times c).\vec{a}$

---

55) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$



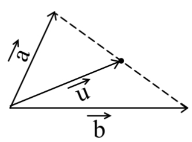
---

56) 

مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده توسط ۲ بردار a و b

$$S=\begin{cases}|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{d}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}\times\vec{d}|\\ \frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{d}|=\frac{1}{2}|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|\end{cases}$$

---

57) 

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

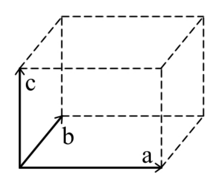
مساحت مثلث ساخته‌شده توسط ۲ بردار a و b

58) میانه $\vec{u}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

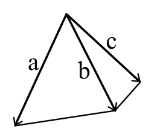
---

59) حجم متوازی‌السطوح بناشده روی ۳ بردار a و b و c

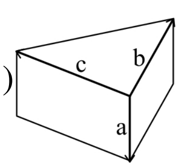
$$\Rightarrow\begin{cases}V=|a.(b\times c)|=|b.(c\times a)|=|c.(a\times b)|\\ \text{ارتفاع متوازی‌السطوح}=\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}\end{cases}$$



60) حجم جرم بناشده روی ۳ بردار a و b و c $\Rightarrow V=\frac{1}{6}|a.(b\times c)|$



---

61) 

$\Rightarrow V=\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$ (حجم منشور مثلث‌القاعده بناشده روی ۳ بردار a و b و c)

فصل دوم

1) $\vec{u}:\left(\frac{a}{m},\frac{b}{n},\frac{c}{p}\right)\Rightarrow\left(\frac{mx-x_0}{a}=\frac{ny-y_0}{b}=\frac{pz-z_0}{c}\right)$ بردار هادی خط به معادله

---

2) $\vec{u}:(a,b,c)$ بردار هادی خط به معادله

معادله پارامتری خط $\Rightarrow\begin{cases}x=at+x_0\\ y=bt+y_0\\ z=ct+z_0\end{cases}$

➢ معادلات خطوط عمود بر محورها

3) x عمود بر محور: $\begin{cases}x=x_1\\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

4) y عمود بر محور: $\begin{cases}y=y_1\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

5) z عمود بر محور: $\begin{cases}z=z_1\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\end{cases}$

➢ معادلات خطوط واقع در صفحات مختصات

6) zoy واقع در: $\begin{cases}x=0\\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

7) xoz واقع در: $\begin{cases}y=0\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

8) yox واقع در: $\begin{cases}z=0\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\end{cases}$

9) فاصله‌ی نقطه از خط $\Rightarrow d=\dfrac{|\vec{u}\times\overline{AA'}|}{|\vec{u}|}$

بردار هادی خط: $\vec{u}$

نقطه‌ای دلخواه از خط: A'

نقطه‌ی مورد نظر: A

---

10) فاصله‌ی ۲ خط موازی $\Rightarrow d=\dfrac{|\vec{u}\times\overline{AA'}|}{|\vec{u}|}$

بردارهای خط‌های ۱ یا ۲: $\vec{u}$

نقطه‌ای دلخواه از خط ۱: A

نقطه‌ای دلخواه از خط ۲: A'

---

11) طول عمود مشترک ۲ خط متنافر $=\dfrac{|\vec{u}\times\overline{AA'}|}{|\vec{u}|}$

ضرب خارجی هادی‌های ۲ خط: $u=u_1\times u_2$

نقطه‌ای دلخواه از خط اول: A

نقطه‌ای دلخواه از خط دوم: A'

➢ وضعیت ۲ خط نسبت به هم:

12) توازی $\Rightarrow \dfrac{a_1}{a'_1}=\dfrac{a_2}{a'_2}=\dfrac{a_3}{a'_3}$ شرط موازی بودن ۲ خط با بردارهای هادی (a_1,b_2,c_3) و (a'_1,b'_2,c'_3)

---

13) منطبق $\Rightarrow$ شرط توازی را بررسی می‌کنیم اگر یک نقطه‌ی مشترک داشتند منطبق هم هستند.

---

14) تقاطع $\Rightarrow$ معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیست از ۳ تساوی دو (t) یکسان بدست آوریم آن‌گاه ۲ خط متقاطعند.

15) متنافر $\Rightarrow$ معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیست به ازای حل ۳ معادله دو (t) مختلف یافت شود تا تنافر خطوط اثبات شود.

16) $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ و موازی بردار هادی $\vec{u}(a,b,c)$

معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$

17) $\frac{x-x_0}{x_2-x_1}=\frac{y-y_0}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}$

➢ صفحه:

معادله‌ی صفحه شامل نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و با نرمال عمود بر صفحه‌ی $\vec{N}:(a,b,c)$

18) $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

یافتن بردار نرمال صفحه در حالات مختلف: (X نماد ضرب خارجی است)

19) $\vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ — نرمال صفحه‌ای که از یک نقطه بگذرد و با ۲ خط متنافر با هادی‌های u_1 و u_2 موازی باشد.

20) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ — نرمال صفحه‌ای که از ۳ نقطه‌ی A و B و C غیرواقع بر یک خط راست بگذرد .

21) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$ — نرمال صفحه‌ی شامل نقطه‌ی A و خط d که B نقطه‌ای روی d و $\vec{u}$ هادی d است.

22) $\vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ — نرمال صفحه‌ای که شامل ۲ خط متقاطع با هادی‌های u_1 و u_2 باشد.

23) $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ — نرمال صفحه‌ای شامل یک نقطه و عمود بر ۲ صفحه‌ی متقاطع p_1 و p_2 با نرمال‌های N_1 و N_2.

24) $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{N}'$ — نرمال صفحه‌ی شامل یک نقطه که عمود بر صفحه‌ی p' و موازی خط d با هادی u است.

25) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$ — نرمال صفحه‌ای که از ۲ نقطه‌ی A و B گذشته و با خط d با هادی $\vec{u}$ موازی است.

26) $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{N}'$ — نرمال صفحه‌ای که شامل خط d با هادی u و عمود بر صفحه‌ی p' با نرمال N' است.

27) $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{u}'$ — نرمال صفحه‌ی شامل خط d با هادی u و موازی خط d' با هادی u'.

28) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$ — نرمال صفحه شامل ۲ خط موازی d_2 و d_1 که A نقطه‌ای روی d_1 و B نقطه‌ای روی d_2 است و u هادی یکی از خطوط است.

29) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times N'$ — نرمال صفحه‌ی گذرا از ۲ نقطه‌ی A و B و عمود بر صفحه‌ی p' به نرمال N'.

30) $\vec{N}=\vec{N}'$ — نرمال صفحه‌ای که شامل یک نقطه است و با صفحه‌ی p' موازی است.

31) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}$ — نرمال صفحه‌ی عمود منصف پاره خط $\overrightarrow{AB}$ که شامل نقطه‌ی $\frac{A+B}{2}$ است.

➢ معادلات صفحه در حالت خاص:

32) صفحه‌ی گذرا از مبدأ مختصات با نرمال $\overrightarrow{N}:(a,b,c)$ $\qquad ax+by+cz=0$

---

33) صفحه‌ی موازی محورها: $\begin{cases} ox \text{ موازی } \Rightarrow by+cz+d=0 \\ oy \text{ موازی } \Rightarrow ax+cz+d=0 \\ oz \text{ موازی } \Rightarrow ax+by+d=0 \end{cases}$

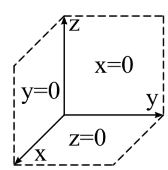
---

34) صفحه‌ی شامل محورها: $\begin{cases} ox \text{ شامل } \Rightarrow by+cz=0 \\ oy \text{ شامل } \Rightarrow ax+cz=0 \\ oz \text{ شامل } \Rightarrow ax+by=0 \end{cases}$ ٭

---

35) صفحات عمود بر محورها (موازی صفحات) $\begin{cases} ox \text{ عمود بر } \Rightarrow x+d=0 \\ oy \text{ عمود بر } \Rightarrow y+d=0 \\ oz \text{ عمود بر } \Rightarrow z+d=0 \end{cases}$ نرمال‌های صفحات به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$اند

36) معادلات صفحات مختصات $\begin{cases} yoz \text{ صفحه } \Rightarrow x=0 \\ xoz \text{ صفحه } \Rightarrow y=0 \\ xoy \text{ صفحه } \Rightarrow z=0 \end{cases}$

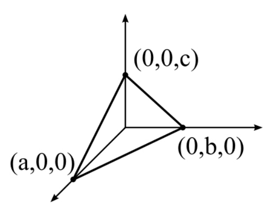


---

37) معادلات صفحات نیمساز $\begin{cases} x=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز } \Rightarrow y=z \\ y=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز } \Rightarrow x=z \\ z=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز } \Rightarrow x=y \end{cases}$

---

38) معادله‌ی صفحه‌ای که هر ۳ محور را در نقاط $\begin{Bmatrix} (a,0,0) \\ (0,b,0) \\ (0,0,c) \end{Bmatrix}$ قطع کند. $\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



39) حجم هرم تشکیل‌شده توسط صفحه به رأس مبدأ $\qquad V=\frac{1}{6}|abc|$

40) مساحت مثلث حاصل از محل تقاطع صفحه $\qquad S_{abc}=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}$

---

41) $\mathbf{P(A)}$ یعنی صدق نقطه‌ی $\mathbf{A}$ در معادله صفحه
$$\begin{cases} P(A).P(B)>0 & \text{۲ نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌اند.} \\ P(A).P(B)<0 & \text{۲ نقطه‌ی A و B در ۲ سوی صفحه‌اند.} \\ P(A).P(B)=0 & \text{حداقل یک نقطه در صفحه است.} \end{cases}$$
بررسی موقعیت ۲ نقطه نسبت به صفحه

---

42) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x',y',z')$ از صفحه‌ی $P(x,y,z): ax+by+cz+d=0$
$$AH=\frac{|ax'+by'+cz'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|P(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

43) فاصله مبدأ از صفحه
$$AH'=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

---

44) فاصله‌ی ۲ صفحه‌ی موازی به معادله‌های $\left.\begin{matrix} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{matrix}\right\}$
$$\text{فاصله}=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

---

45) بردار هادی خط فصل مشترک ۲ صفحه‌ی P و P'
$$\vec{u}=\vec{N}\times\vec{N'}$$

➢ حالات موازی و انطباق و تقاطع ۲ صفحه:

46)
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\begin{cases} \neq\dfrac{d}{d'} & \text{موازی} \\ =\dfrac{d}{d'} & \text{منطبق} \end{cases}$$

---

47) $\vec{N}.\vec{N'}=0$ عمود

---

48) θ زاویه‌ی ۲ صفحه‌ی متقاطع با نرمال‌های N و N'
$$\cos\theta=\frac{|N.N'|}{|N||N'|}$$

➢ وضعیت خط با هادی $\vec{u}(a,b,c)$ با صفحه به نرمال $N(a',b',c')$

49) $\vec{u}.\vec{N}=0$ خط موازی صفحه یا منطبق

50) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ خط عمود بر صفحه

فصل سوم

مقاطع مخروطی

1) $(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=R^2$ معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R و مرکز (α,β)

---

2) $S(\alpha, a\alpha+b)$مرکز دایره‌ای که مرکزش روی خط $y=ax+b$ است.

---

3) $x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow \left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$مرکز

---

4) تعیین وضعیت خط و دایره از راه محاسبه (به جای y در معادله‌ی دایره y خط مذکور را جاگذاری کرده و Δرا می‌یابیم): $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta>0 & \text{متقاطع} \\ \Delta=0 & \text{مماس} \\ \Delta<0 & \text{متخارج} \end{cases}$$

---

5) نوشتن معادلۀ مماس از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ی $x^2+y^2+ax+by+cx=0$

- اگر نقطه روی دایره بود مشتق ضمنی گرفته و شیب را می‌یابیم.
- اگر نقطه بیرون دایره بود معادله خط را با شیب M نوشته و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط را برابر شعاع قرار داده و M را می‌یابیم.

---

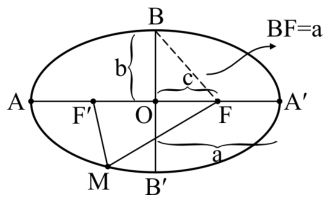
6) $d=\sqrt{c(x_0,y_0)}$ طول مماس رسم‌شده از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ی

$$c(x,y): x^2+y^2+cx+by+c=0$$

---

7) اگر معادله کلی اقطار دایره‌ای به صورت $ax+by+c=0$ باشد برای یافتن مرکز دایره کافیست ۲ قطر دلخواه را قطع دهیم.

بیضی

8) 

➢ روابط بیضی :

9) $MF+MF'=2a$ نقطه‌ی دلخواه روی محیط بیضی M

10) $b^2+c^2=a^2$ رابطه‌ی طلایی بیضی

11) OA برابر BF و BF' است

12) $O=\dfrac{F+F'}{2}$

➢ اصطلاحات بیضی: (با توجه به شکل)

13) مرکز تقارن : O : BB' و AA' محل برخورد

14) رئوس کانونی : نقاط A و A' یعنی ۲ سر قطر بزرگ

15) رئوس ناکانونی : نقاط B و B' یعنی ۲ سر قطر کوچک

16) کانون‌های بیضی : F و F' را گویند (F همواره وسط OA نیست)

17) فاصله‌ی کانونی : $FF'=2C$ پاره خط FF' را گویند

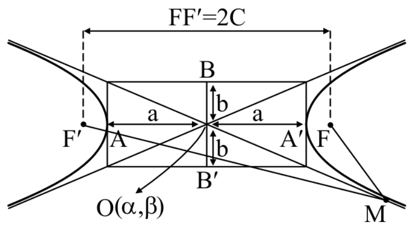
18) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ معادله‌ی بیضی افقی به مرکز (α,β) و قطرهای $2a$ و $2b$

19) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ معادله‌ی بیضی قائم به مرکز (α,β) و قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$

20) معادله گسترده‌ی بیضی
$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0\begin{cases} A<B & \text{بیضی افقی} \\ A>B & \text{بیضی قائم} \end{cases}$$

21) خروج از مرکز $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{Min}\{A,B\}}{\mathrm{Max}\{A,B\}}}$

هذلولی

22) 

23) $|MF' - MF| = 2a$ — M نقطه‌ای دلخواه روی یکی از شاخه‌های هذلولی

24) $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow AB = OF = C$ * — رابطه‌ی طلایی هذلولی

➢ **اصطلاحات هذلولی**

25) نقاط F و F' : **کانون‌ها**

26) نقاط A و A' که **2** رأس کانونی‌اند و رأس ناکانونی نداریم : **رئوس**

27) پاره خط FF' که برابر $2C$ است : **فاصله کانونی**

28) فاصله $AA' = 2a$ را گویند : **قطر هذلولی**

29) خط AA' یا FF' و همچنین خط BB' : **محورهای تقارن**

---

30) هذلولی افقی $\Rightarrow \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

31) مجانب‌های هذلولی افقی $\Rightarrow \dfrac{x-\alpha}{a} \pm \dfrac{y-\beta}{b} = 0$

---

32) هذلولی قائم $\Rightarrow \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} - \dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$

33) مجانب‌های هذلولی قائم $\Rightarrow \dfrac{y-\beta}{a} \pm \dfrac{x-\alpha}{b} = 0$

---

34) $M =$ شیب مجانب‌های هذلولی افقی $= \pm \dfrac{b}{a}$

35) $M =$ شیب مجانب‌های هذلولی قائم $= \pm \frac{a}{b}$

36) در هذلولی، نوع آن (قائم بودن و نبودن آن) به کوچک و بزرگی مخرج x^2 و y^2 ربطی ندارد.

37) اگر علامت x^2 $(+)$ بود آن‌گاه هذلولی افقی است.

38) اگر علامت x^2 $(-)$ بود آن‌گاه هذلولی قائم است.

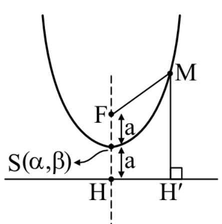
---

39) اگر معادله‌ی ۲ مجانب یک هذلولی به صورت $(ax+by+c=0)$ و $(a'x+b'y+c'=0)$ باشد آن‌گاه معادله گسترده‌ی هذلولی به صورت روبرو است.

$$(a'x+b'y+c')(a'x+b'y+c')=K$$

K مقدار ثابتی است که با داشتن یک نقطه روی هذلولی یافت می‌شود.

سهمی

40) 

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$$

راس = $S(\alpha,\beta)$

---

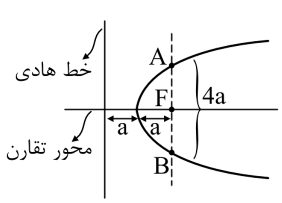
41) $MH' = MF$ — M نقطه‌ای دلخواه روی هذلولی (MH' باید عمود بر هادی باشد)

42) $FS = SH = a$

---

43) $0 =$ مشتق نسبت به متغیر درجه 2 $\Rightarrow$ یافتن محور تقارن سهمی توسط معادله درجه 2

---

44) 

اگر از کانون خطی موازی خط هادی رسم کنیم سهمی را در 2 نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که: $AB = 4a$

45) $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ — معادله سهمی افقی

➢ دوران محورهای مختصات:

46) $\tan 2\theta = \dfrac{b}{a-c}$ فرمول یافتن زاویه‌ی دوران مقطع مخروطی دوران یافته به معادله گسترده $(\underline{\underline{a}}x^2 + \underline{\underline{b}}xy + \underline{\underline{c}}y^2 + dx + ey + f = 0)$

---

47) $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

x و y حاصل را در معادله‌ی گسترده قرار داده و مقطع مخروطی را مربع کامل می‌کنیم.

---

48) فرمول‌های مثلثات مربوط $$\begin{cases} 1 + \tan^2 2\theta = \dfrac{1}{\cos^2 2\theta} \\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \ , \ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases}$$

---

49) $b^2 - 4ac = \Delta$ تشخیص نوع مقطع به کمک $\underline{\underline{a}}x^2 + \underline{\underline{b}}xy + \underline{\underline{c}}y^2 + dx + ey + f = 0$
$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

- $\Delta < 0$: بیضی، تهی، نقطه
- $\Delta = 0$: صفحه، تهی، ۲ خط موازی، یک خط، سهمی
- $\Delta > 0$: هذلولی، ۲ خط متقاطع

50) $a = c$ و $b = 0 \Rightarrow$ معادله مربوط به دایره می‌گردد.

51) $A = \begin{bmatrix} a & \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ ماتریس مقطع مخروطی

52) دترمینان ماتریس مقطع استاندارد=دترمینان ماتریس مقطع دوران یافته (به شرط یکی بودن مقادیر ثابت K)

53) ماتریس مقطع استاندارد $\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 = K$

➢ استاندارد کردن مقطع در ۲ حالت خاص:

54) $$ax^2+bxy+ay^2=K \xrightarrow{\text{استاندارد}} \left(a-\frac{b}{2}\right)x^2+\left(a+\frac{b}{2}\right)y^2=K$$

---

55) $$A=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

استاندارد کردن مقطع $ax^2+bxy+cy^2=K$ که دارای ماتریس مقابل است.

$$\begin{cases} \lambda^2-(a+c)\lambda+|A|=0 & \text{تشکیل معادله روبرو} \\ \lambda_1,\lambda_2 & \text{یافتن ریشه‌های معادله} \\ \lambda_1x^2+\lambda_2y^2=K & \text{تشکیل معادله‌ی استاندارد به صورت روبرو} \end{cases}$$

فصل چهارم

ماتریس

1) ماتریس قطری $\Rightarrow\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ تمام عناصر خارج قطر اصلی 0 اند.

2) ماتریس اسکالر $\Rightarrow\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی یکسانند.

3) I (واحد) ماتریس همانی $\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ اسکالری که قطر اصلی (1) است.

4) ماتریس بالا مثلثی $\Rightarrow\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی (0) است.

5) ماتریس پایین مثلثی $\Rightarrow\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی (0) است.

6) $(\overline{\mathrm{O}})$ ماتریس $\Rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی که همه درایایش 0 باشد.

---

7) عضو خنثی ضرب در ماتریس‌ها $\Rightarrow$ ماتریس همانی

8) عضو خنثی جمع در ماتریس‌ها $\Rightarrow (\overline{\mathrm{O}})$ ماتریس

- ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها:

9) $AB=0 \not\Rightarrow BA=0$

10) $A(BC)=(AB)C$

11) $\begin{cases} A(B+C)=AB+AC \\ (B+C)A=BA+CA \end{cases}$

12) $AI=IA=A$

13) $(rA)(sB)=(rs)AB$

14) $AB=KI \Rightarrow BA=KI$

15) $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

16) $AB=AC \xrightarrow{|A|\neq 0} B=C$

17) $I^n=I$

18) $A^0=I$

19) $A^m+A^n=A^{(m+n)}$

ماتریس خود توان:

20) $A^2=A \Rightarrow A^n=A$ و $(I-KA)^{-1}=I+\left(\dfrac{K}{1-K}\right)A$ ⟸ تمرین کتاب

21) ویژگی‌ها $\begin{cases} (I-A)^n=I-A \\ (I+A)^n=I+(2^n-1)A \end{cases}$

➢ ماتریس پوچ توان:

22) $A^n=\overline{O}$

23) $Min(n)=$ اندیس پوچ توانی

24) $\begin{cases} |A|=0 \\ a+d=1 \end{cases}$ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شروط خودتوانی ماتریس

25) $\begin{cases} |A|=0 \\ a+d=0 \end{cases}$ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شروط پوچ توانی ماتریس

---

26) اگر $A=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix}$

27) اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^n=\begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix} & n \text{ زوج} \\ A^n=\begin{bmatrix} 0 & K^n \\ K^n & 0 \end{bmatrix} & n \text{ فرد} \end{cases}$

28) اگر $A^2=KA \Rightarrow A^n=K^{n-1}A$

➢ ماتریس ترانهاده A^T:

29) $(A^T)^T=A$

30) $(A \pm B)^T=A^T \pm B^T$

31) $(AB)^T=B^T A^T$

32) $(A^n)^T=(A^T)^n$

33) $(rA)^T=r(A^T) \Rightarrow (-A)^T=-A^T$

➢ ماتریس متقارن $A^T=A$:

34) $(A+B)^T=A+B$

35) $(A-B)^T=A^T-B^T=A-B$

36) $A^T=A$ و $B^T=B$

37) $(rA)^T=rA^T=rA$

38) $(A^n)^T=(A^T)^n=A^n$

39) $(A^T)^T = A = A^T$

40) $(A - I)^T = A - I$

41) $(A + I)^T = A + I$

➢ ماتریس پادمتقارن:

42) $A^T = -A$

43) $A^T = -A$ و $B^T = -B \Rightarrow (A+B)^T = -(A+B)$

44) $(A - B)^T = A^T - B^T$

45) $(rA)^T = rA^T = r(-A) = -rA$

46) اگر A پادمتقارن باشد توان‌های زوج A **متقارن است و توان‌های فرد** A **پادمتقارن است.**

47) $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمتقارن}}$ ماتریس به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته می‌شود.

---

48) **ماتریس کهاد:** سطر iام و ستون jام که از حذف سطر i و ستون j پدید آمده

$$\begin{cases} (M_{ij}) \\ \text{مثال} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \to M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \end{cases}$$

کهاد سطر و ستون 2

---

49) **همسازه:** درایه‌ی ij از ماتریس $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times m}$.

$$\begin{cases} A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \\ \text{مثال} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \to A_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times -6 = 6 \end{cases}$$

---

50) اگر همسازه درایه‌ای 0 شد با تغییرش دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند. $A_{ij} = 0$

➢ محاسبه‌ی سرعتی همسازه ماتریس 3×3

51) $$\text{همسازه}=\begin{bmatrix} (\text{ضرب خارجی سطر } 3,2) \\ -(\text{ضرب خارجی سطر } 3,1) \\ (\text{ضرب خارجی سطر } 2,1) \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی = ترانهاده‌ی همسازه

52) $$\begin{cases} (A^*)^T = \text{همسازه} \\ (\text{همسازه})^T = A^* \end{cases}$$

➢ محاسبه‌ی سریع ماتریس الحاقی 3×3

53) $$A^* = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارج سطر } 3,2) & -(\text{ضرب خارج سطر } 3,1) & (\text{ضرب خارج سطر } 2,1) \end{bmatrix}$$

➢ ویژگی‌های A^*

54) $A^*A = AA^* = I\,|A|$

55) $|A^*| = |A|^{n-1}$ (n مرتبه است)

56) $(KA)^* = K^{n-1}A^*$

57) $|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$

58) $(A^*)^* = |A|^{n-2}$

59) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

دترمینان

60) اگر سطر یا ستون پیدا کردیم که درایه‌های آن مضرب سطر یا ستون دیگری باشند آن‌گاه $\det(A)=0$

61) $|A^T|=|A|$

62) $|BA|=|AB|=|A||B|$ اگر B و A مربعی و هم مرتبه باشند

63) در ماتریس 2×2 افزودن یا کاستن مقداری ثابت از همه‌ی درایات det را تغییر نمی‌دهد.

64) $$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = K\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}$$

---

65) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g\pm ka & h\pm kb & i\pm kc \end{vmatrix}$$

---

66) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x\pm x' & y\pm y' & z\pm z' \end{vmatrix}$$

67) اگر سطر یا ستونی را در K ضرب کنیم دترمینان (K) برابر می‌شود.

68) $|KA|=K^n|A|$ (n مرتبه ماتریس)

---

69) در det می‌توان هر سطری را با سطر دیگری یا ستون با ستون دیگری را جمع و تفریق کرد بی‌آنکه det تغییر کند.

---

70) $|A^{-1}\pm B^{-1}|=\dfrac{|B\pm A|}{|A||B|}$ قوانین **det** برای ماتریس $n\times n$

71) $|AB| = |BA| = |A||B|$

72) $|A^T| = |A|$

73) $|A^n| = |A|^n$

74) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

➢ محاسبه‌ی سریع $\det(3\times3)$

75) $$A = \begin{array}{c} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{array}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}_1 = (a,b,c) \\ \vec{V}_2 = (d,e,f) \\ \vec{V}_3 = (g,h,i) \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = \vec{V}_3 \underset{\text{ضرب نقطه‌ای}}{.} (\vec{V}_1 \underset{\text{ضرب خارجی}}{\times} \vec{V}_3)$$

---

76) $I^{-1} = I$

77) $(rI)^{-1} = \dfrac{1}{r} I$

78) $$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

79) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

80) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

81) $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B \neq BA^{-1}$

82) $AB=I \Rightarrow \begin{cases} A^{-1}=B \\ B^{-1}=A \end{cases}$

83) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}$

84) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

85) $(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}=A^{-n}$

86) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

87) اگر $A=A^{T}$ یا $-A=A^{T} \Rightarrow A^{-1}=(A^{-1})^{T}$ یا $(-A^{-1})=(A^{-1})^{T}$

88) $(A^{-1}BA)^{n}=A^{-1}B^{n}A$

89) $(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}$

90) $|A^{-1}\pm B^{-1}|=\frac{|B\pm A|}{|A||B|}$

---

* ماتریس معکوس

91) $A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}$

92) $|A^{*}|=|A|^{n-1}$

A_{ji} : همسازه‌ی سطر jام و ستون iام از ماتریس A

93) A^{-1} درایه‌ی سطر i ام و ستون j ام از $=\frac{A_{ji}}{|A|}$

---

94) $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow R^{-1}(\theta)=R(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

➢ ماتریس تبدیل‌های خطی

95) $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)\Rightarrow$ ماتریس $=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

96) $T(x,y)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(ax+by,cx+dy)$

97) $S'=|\det(A)|S$

اگر شکلی با مساحت S تحت تبدیل ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ به شکل دیگری تبدیل شود مساحت شکل جدید S' به صورت روبروست .

98) اگر ماتریس یک تبدیل A و تبدیل دیگری B باشد و ماتریس تبدیل متوالی این دو خواسته شد آن‌ها را از آخر در هم ضرب می‌کنیم. ($BA=$ماتریس نهایی)

➢ ماتریس دوران (ویژگی‌ها):

99) $R_\alpha . R_\beta = R_\beta . R_\alpha = R_{(\alpha+\beta)}$

100) $|R_\alpha|=1$ دترمینان

101) $(R_\alpha)^{-1}=(R_\alpha)^T=R_{(-\alpha)}$

102) $R(2K\pi+\alpha)=R_\alpha$

103) $(R_\alpha)^n=R_{(n\alpha)}$

فصل پنجم

➢ مدل ماتریس دستگاه معادلات خطی:

$$\textbf{1)}\quad \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow X=A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

$$2)\quad |A|=0 \begin{cases} \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'} & \text{۲ خط موازی بدون جواب} \\ \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'} & \text{۲ خط منطبق بی‌شمار جواب} \end{cases}$$

---

3) $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$ و $|A|\neq 0$ ۲ خط متقاطع و یک جواب

➢ حل دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول به روش کرامر:

$$4)\quad \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

$$5)\quad A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$ ماتریس ضرایب مجهول A

$$6)\quad A_1=\begin{bmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{|A_1|}{|A|}$$

$$7)\quad A_2=\begin{bmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{bmatrix} \Rightarrow y=\frac{|A_2|}{|A|}$$

$$8)\quad A_3=\begin{bmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{bmatrix} \Rightarrow z=\frac{|A_3|}{|A|}$$

➢ تعداد جواب‌های معادله ۳ مجهولی توسط دترمینان‌ها :

9) $|A| \neq 0$ جواب منحصر به فرد

10) $|A| = 0 \begin{cases} |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0 & \text{بی‌شمار جواب} \\ \text{در غیر این صورت} \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$

➢ روش حذفی گاوس:

11) $\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right]$

به کمک جمع و تفریق ستون‌ها و سطرها در ماتریس که از ویژگی‌های محاسبه‌ی det است (ابتدا a' را صفر می‌کنیم سپس a'' سپس b'')