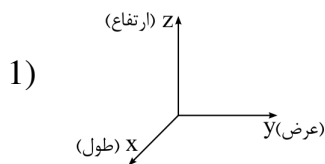


هندسه تحلیلی

فصل اول



نامگذاری محورها

2) $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فاصله‌ی نقطه‌ی M به مختصات (x, y, z) از مبدأ

3) (x, y, z) فاصله نقطه از محورها

$$\begin{cases} d = \sqrt{y^2 + z^2} & \text{فاصله از محور } x \text{ ها} \\ d = \sqrt{x^2 + z^2} & \text{فاصله از محور } y \text{ ها} \\ d = \sqrt{y^2 + x^2} & \text{فاصله از محور } z \text{ ها} \end{cases}$$

4) (x, y, z) فاصله نقطه از صفحات

$$\begin{cases} d = x \rightarrow (yoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d = y \rightarrow (xoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d = z \rightarrow (xoy) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \end{cases}$$

5) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ فاصله‌ی ۲ نقطه به مختصات (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) از هم

6) $P: \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$ مختصات وسط پاره خط متصل‌کننده‌ی دو نقطه‌ی (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2)

7) $\begin{cases} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) \\ C(x_3, y_3, z_3) \end{cases}$ مثلث
 مثلث برشور، ۳ میانه‌ی مثلث
 $G: \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$

$$8) \quad \begin{matrix} \text{تصویر نقطه‌ی } (x, y, z) \\ \text{نسبت به صفحات مختصات} \end{matrix} \begin{cases} (x, y, \text{صفحه}) & (xoy) \text{ نسبت به} \\ (x, \text{صفحه}, z) & (xoz) \text{ نسبت به} \\ (\text{صفحه}, y, z) & (yoz) \text{ نسبت به} \end{cases}$$

$$9) \quad \begin{matrix} \text{تصویر نقطه‌ی } (x, y, z) \\ \text{نسبت به محورهاى مختصات} \end{matrix} \begin{cases} (x, 0, 0) & \text{نسبت به محور } x \text{ ها} \\ (0, y, 0) & \text{نسبت به محور } y \text{ ها} \\ (0, 0, z) & \text{نسبت به محور } z \text{ ها} \end{cases}$$

$$10) \quad \text{نقطه} - \text{تصویر } 2 \times = \text{قرینه}$$

نسبت
به محور
یا صفحه

$$11) \quad |\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \vec{V}(a, b, c) \quad \text{طول بردار به مختصات}$$

$$12) \quad \vec{Ma} = (Ma_1, Ma_2, Ma_3) \quad \text{ضرب عدد } M \text{ در بردار}$$

$$13) \quad |\vec{Ma}| = |M| |\vec{a}|$$

$$14) \quad \text{اگر } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ بردار و } (a', b', c') \text{ موازی باشند} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$15) \quad \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| & \text{مستطیل} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) & \text{لوزی} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |M\vec{a} + n\vec{b}| = |M\vec{a} - n\vec{b}| & \text{تعمیم نکته مستطیل} \end{cases}$$

$$16) \quad \vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{e}_a = \left(\frac{x}{|\vec{a}|}, \frac{y}{|\vec{a}|}, \frac{z}{|\vec{a}|} \right) \quad \text{بردار یکه}$$

$$17) \quad \vec{V} = (a, b, c) \Leftrightarrow \vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$18) \begin{cases} \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{j} = (0, 1, 0) \\ \vec{k} = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$19) u_T = |\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}| |\vec{a}| \quad (\vec{b} \text{ و } \vec{a} \text{ بردار ۲ بر دایره بین})$$

$$20) \left. \begin{array}{l} \vec{a}(x, y, z) \text{ ضرب نقطه‌ای} \\ \vec{b}(x', y', z') \text{ (داخلی)} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (xx' + yy' + zz')$$

$$21) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\theta \text{ زاویه بین } \vec{a} \text{ و } \vec{b})$$

$$22) \left. \begin{array}{l} \text{۳ اتحاد ضرب} \\ \text{داخلی} \end{array} \right\} \begin{cases} |\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \\ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \end{cases}$$

$$23) e_a \cdot e_b = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$24) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$25) \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$

$$26) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$27) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$28) \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \rightarrow \text{بی معنی}$$

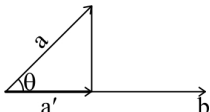
$$29) |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \text{نامساوی کوشی شوارتز}$$

$$30) (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b}) = r(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad r \text{ عددی متعلق به } R$$

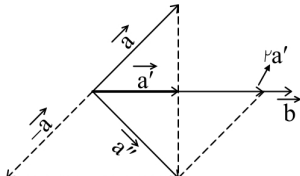
$$31) i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$32) \quad \vec{a}:(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{i} = a_1 \\ \vec{a} \cdot \vec{j} = a_2 \\ \vec{a} \cdot \vec{k} = a_3 \end{cases}$$

$$33) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c}) \\ \vec{b} = \vec{c} \end{cases}$$

$$34) \quad |\vec{a}'| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$


$$35) \quad \vec{a}' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b} \quad (\vec{a}': \text{تصویر } \vec{a} \text{ نسبت به } \vec{b})$$

$$36) \quad \vec{a}'' = 2\vec{a}' + (-\vec{a})$$


(قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

$\vec{a}'$: تصویر $\vec{a}$
 $\vec{a}''$: قرینه‌ی $\vec{a}$

$$37) \quad \vec{a}' \cdot \vec{a}'' = \vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}'|^2$$

$\vec{a} \times \vec{b}$: ضرب خارجی

$$38) \quad \begin{pmatrix} \vec{a}(x, y, z) \\ \vec{b}(x', y', z') \end{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$39) \quad \sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$40) \begin{cases} i \times j = k \\ j \times k = i \\ k \times i = j \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} \\ \nearrow \quad \searrow \\ k \quad j \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \text{---} \end{array}$$

◀ ویژگی‌های ضرب فاربی:

$$41) \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

$$42) \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$43) |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$$

$$44) \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$45) \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

$$46) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$47) r(\vec{a} \times \vec{b}) = r\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$$

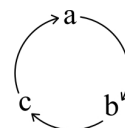
$$48) \vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{توزیع پذیری دارد}$$

$$49) (\vec{b} \pm \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \pm \vec{c} \times \vec{a} \quad \text{توزیع پذیری دارد}$$

$$50) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \quad \text{شرکت پذیری ندارد}$$

$$51) |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$52) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \quad \text{اگر برای ۳ بردار } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ داشته باشیم}$$



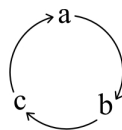
$$53) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

◀ ضرب ممتلذ:

$$54) \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \alpha \cos \theta$$

$\swarrow$ زاویه بین $\vec{c}, \vec{b}$ $\searrow$ زاویه بین $(\vec{b} \times \vec{c}), \vec{a}$

$$55) \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

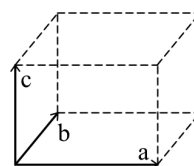


$$56) \begin{array}{l} \text{مساحت متوازی الاضلاع} \\ \text{ساخته شده توسط } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \end{array} S = \begin{cases} |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{d}| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{b} \times \vec{d}| \\ \frac{1}{2} |\vec{c} \times \vec{d}| = \frac{1}{2} |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| \end{cases}$$

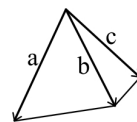
$$57) \begin{array}{l} \text{مساحت مثلث ساخته شده} \\ \text{توسط } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \end{array} S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$58) \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \text{ میانه}$$

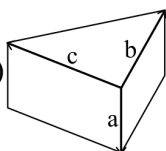
$$59) \begin{array}{l} \text{مجموع متوازی السطوح باشد} \\ \text{روی } \vec{a}, \vec{b} \text{ و } \vec{c} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| \\ \text{ارتفاع متوازی السطوح} = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \end{cases}$$



$$60) \begin{array}{l} \text{مجموع هرم باشد} \\ \text{روی } \vec{a}, \vec{b} \text{ و } \vec{c} \end{array} \Rightarrow V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$



$$61) \begin{array}{l} \text{مجموع منشور مثلث القاعه باشد} \\ \text{روی } \vec{a}, \vec{b} \text{ و } \vec{c} \end{array} \Rightarrow V = \frac{1}{2} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$



فصل دوم

$$1) \quad \vec{u}: \left(\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p} \right) \Rightarrow \left(\frac{mx - x_0}{a} = \frac{ny - y_0}{b} = \frac{pz - z_0}{c} \right) \text{ بردار هادی خط به معادله}$$

$$2) \quad \vec{u}: (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \text{ بردار هادی خط به معادله پارامتری خط}$$

◀ معادلات خطوط عمود بر محورهای

$$3) \quad \text{عمود بر محور } x: \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

$$4) \quad \text{عمود بر محور } y: \begin{cases} y = y_1 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

$$5) \quad \text{عمود بر محور } z: \begin{cases} z = z_1 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

◀ معادلات خطوط واقع در صفحات مختصات

$$6) \quad \text{واقع در } xoy: \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

$$7) \quad \text{واقع در } xoz: \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

$$8) \quad \text{واقع در } yox: \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

$$9) \quad d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u}|} \Rightarrow d = \text{فاصله‌ی نقطه از خط}$$

$\vec{u}$: بردار هادی خط؛

A' : نقطه‌ای دلفواه از خط؛

A : نقطه‌ی مورد نظر؛

$$10) \quad d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u}|} \Rightarrow d = \text{فاصله‌ی ۲ خط موازی}$$

$\vec{u}$: بردارهای خط‌های ۱ یا ۲؛

A : نقطه‌ای دلفواه از خط ۱؛

A' : نقطه‌ای دلفواه از خط ۲؛

$$11) \quad \text{طول عمود مشترک ۲ خط متناظر} = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u}|}$$

$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ ضرب خارجی بردارهای ۲ خط؛

A : نقطه‌ای دلفواه از خط اول؛

A' : نقطه‌ای دلفواه از خط دوم؛

◀ وضعیت ۲ خط نسبت به هم؛

$$12) \quad \text{شرط موازی بودن ۲ خط با بردارهای هادی} \Rightarrow \frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3}$$

(a_1, b_2, c_3) و (a'_1, b'_2, c'_3)

$$13) \quad \text{شرط توازی را بررسی می‌کنیم اگر یک نقطه‌ی مشترک داشته‌اند منطبق هم هستند.} \Rightarrow \text{منطبق}$$

$$14) \quad \text{معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیسیت از ۳ تساوی دو (t) یکسان درست} \Rightarrow \text{تقاطع}$$

آوریم آن‌گاه ۲ خط متقاطعند.

$$15) \quad \text{معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیسیت به ازای حل ۳ معادله دو (t) متناظر} \Rightarrow \text{متناظر}$$

مقتلف یافت شود تا تناظر خطوط اثبات شود.

$$16) \quad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad \text{و} \quad A(x_0, y_0, z_0) \quad \text{معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی}$$

$\vec{u}(a, b, c)$ موازی بردار هادی

$$17) \frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} = \frac{z-z_0}{z_2-z_1} \quad B(x_2, y_2, z_2) \text{ و } A(x_1, y_1, z_1) \text{ نقطه‌ی خط کزرا از نقطه‌ی}$$

◀ صفحه:

$$18) \quad a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0 \quad \text{و} \quad A(x_1, y_1, z_1) \text{ نقطه‌ی صفحه شامل نقطه‌ی}$$

$\vec{N}:(a,b,c)$ با نرمال عمود بر صفحه‌ی

یافتن بردار نرمال صفحه در حالات مختلف: ($\vec{X}$ نماد ضرب شارپی است)

$$19) \quad \vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \quad \text{نرمال صفحه‌ای که از یک نقطه بگذرد و با ۲ خط متناظر با هادی‌های } \vec{u}_1 \text{ و } \vec{u}_2 \text{ موازی باشد.}$$

$$20) \quad \vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \quad \text{نرمال صفحه‌ای که از ۳ نقطه‌ی } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ غیرواقع بر یک خط راست بگذرد.}$$

$$21) \quad \vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} \quad \text{نرمال صفحه‌ی شامل نقطه‌ی } A \text{ و خط } d \text{ که } B \text{ نقطه‌ای روی } d \text{ و } \vec{u} \text{ هادی } d \text{ است.}$$

$$22) \quad \vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \quad \text{نرمال صفحه‌ای که شامل ۲ خط متقاطع با هادی‌های } \vec{u}_1 \text{ و } \vec{u}_2 \text{ باشد.}$$

$$23) \quad \vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \quad \text{نرمال صفحه‌ای شامل یک نقطه و عمود بر ۲ صفحه‌ی متقاطع } p_1 \text{ و } p_2 \text{ با نرمال‌های } \vec{N}_1 \text{ و } \vec{N}_2.$$

$$24) \quad \vec{N} = \vec{u} \times \vec{N}' \quad \text{نرمال صفحه‌ی شامل یک نقطه که عمود بر صفحه‌ی } p' \text{ و موازی خط } d \text{ با هادی } \vec{u} \text{ است.}$$

$$25) \quad \vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} \quad \text{نرمال صفحه‌ای که از ۲ نقطه‌ی } A \text{ و } B \text{ گذشته و با خط } d \text{ با هادی } \vec{u} \text{ موازی است.}$$

$$26) \quad \vec{N} = \vec{u} \times \vec{N}' \quad \text{نرمال صفحه‌ای که شامل خط } d \text{ با هادی } \vec{u} \text{ و عمود بر صفحه‌ی } p' \text{ با نرمال } \vec{N}' \text{ است.}$$

$$27) \quad \vec{N} = \vec{u} \times \vec{u}' \quad \text{نرمال صفحه‌ی شامل خط } d \text{ با هادی } \vec{u} \text{ و موازی خط } d' \text{ با هادی } \vec{u}'.$$

$$28) \quad \vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} \quad \text{نرمال صفحه شامل ۲ خط موازی } d_1 \text{ و } d_2 \text{ که } A \text{ نقطه‌ای روی } d_1 \text{ و } B \text{ نقطه‌ای روی } d_2 \text{ است و } \vec{u} \text{ هادی یکی از خطوط است.}$$

$$29) \quad \vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{N}' \quad \text{نرمال صفحه‌ی کزرا از ۲ نقطه‌ی } A \text{ و } B \text{ و عمود بر صفحه‌ی } p' \text{ به نرمال } \vec{N}'.$$

$$30) \quad \vec{N} = \vec{N}' \quad \text{نرمال صفحه‌ای که شامل یک نقطه است و با صفحه‌ی } p' \text{ موازی است.}$$

$$31) \quad \vec{N} = \overrightarrow{AB} \quad \text{نرمال صفحه‌ی عمود منصف پاره خط } \overrightarrow{AB} \text{ که شامل نقطه‌ی } \frac{A+B}{2} \text{ است.}$$

◀ معادلات صفحه در حالت خاص:

32) $ax + by + cz = 0$

صفحه‌ی گذرا از مبدأ مقتضات با نرمال $\vec{N} : (a, b, c)$

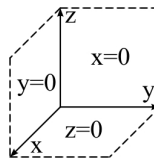
33) صفحه‌ی موازی محورها:
$$\begin{cases} \text{موازی } ox \Rightarrow by + cz + d = 0 \\ \text{موازی } oy \Rightarrow ax + cz + d = 0 \\ \text{موازی } oz \Rightarrow ax + by + d = 0 \end{cases}$$

34) صفحه‌ی شامل محورها:
$$\begin{cases} \text{شامل } ox \Rightarrow by + cz = 0 \\ \text{شامل } oy \Rightarrow ax + cz = 0 \\ \text{شامل } oz \Rightarrow ax + by = 0 \end{cases}$$

✱

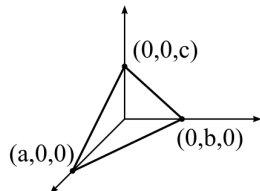
35) صفحات عمود بر محورها (موازی صفحات):
$$\begin{cases} \text{عمود بر } ox \Rightarrow x + d = 0 \\ \text{عمود بر } oy \Rightarrow y + d = 0 \\ \text{عمود بر } oz \Rightarrow z + d = 0 \end{cases}$$
 نرمال‌های صفحات به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ اند

36) معادلات صفحات مقتضات:
$$\begin{cases} \text{صفحه } yoz \Rightarrow x = 0 \\ \text{صفحه } xoz \Rightarrow y = 0 \\ \text{صفحه } xoy \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$



37) معادلات صفحات نیمساز:
$$\begin{cases} \text{صفحه‌ی نیمساز } x=0 \Rightarrow y = z \\ \text{صفحه‌ی نیمساز } y=0 \Rightarrow x = z \\ \text{صفحه‌ی نیمساز } z=0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

38) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



معادله‌ی صفحه‌ای که هر ۳ محور را در نقاط $\left. \begin{matrix} (a,0,0) \\ (0,b,0) \\ (0,0,c) \end{matrix} \right\}$ قطع کند.

39) $V = \frac{1}{6} |abc|$

حجم هرم تشکیل شده توسط صفحه به رأس مبدأ

40) $S_{abc} = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}$

مساحت مثلث حاصل از محل تقاطع صفحه

$$41) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(A).P(B) > 0 \quad \text{در یک طرف صفحه اند.} \\ P(A).P(B) < 0 \quad \text{در ۲ سوی صفحه اند.} \\ P(A).P(B) = 0 \quad \text{در اقل یک نقطه در صفحه است.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{بررسی موقعیت} \\ \text{۲ نقطه نسبت} \\ \text{به صفحه} \end{array}$$

$P(A)$ یعنی صدق نقطه‌ی A در معادله صفحه

$$42) \quad AH = \frac{|ax' + by' + cz' + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|P(A)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x', y', z')$ از صفحه‌ی $P(x, y, z): ax + by + cz + d = 0$

$$43) \quad AH' = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

فاصله مبداء از صفحه

$$44) \quad \text{فاصله} = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ ax + by + cz + d' = 0 \end{array} \right.$$

فاصله‌ی ۲ صفحه‌ی موازی به معادله‌های

$$45) \quad \vec{u} = \vec{N} \times \vec{N}'$$

بردار هادی خط فصل مشترک ۲ صفحه‌ی P' و P

◀ حالات موازی و انطباق و تقاطع ۲ صفحه:

$$46) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \left\{ \begin{array}{l} \neq \frac{d}{d'} \quad \text{موازی} \\ = \frac{d}{d'} \quad \text{منطبق} \end{array} \right.$$

$$47) \quad \vec{N} \cdot \vec{N}' = 0 \quad \text{عمود}$$

$$48) \quad \cos \theta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{N}'|}{|\vec{N}| |\vec{N}'|}$$

θ زاویه‌ی ۲ صفحه‌ی متقاطع با نرمال‌های N و N'

◀ وضعیت خط با هادی $\vec{u}(a, b, c)$ با صفحه به نرمال $N(a', b', c')$

$$49) \quad \vec{u} \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{خط موازی صفحه یا منطبق}$$

$$50) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{خط عمود بر صفحه}$$

فصل سوم

مقاطع مخروطی

1) $(x - \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = R^2$ معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R و مرکز (α, β)

2) $S(\alpha, a\alpha + b)$ دایره‌ای که مرکزش روی خط $y = ax + b$ است.

3) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ مرکز

4) $\Rightarrow$ تعیین وضعیت خط و دایره از راه

$\Delta > 0$	مقاطع
$\Delta = 0$	مماس
$\Delta < 0$	متفارج

مماسه (به جای y در معادله‌ی دایره y خط مذکور را جایگزاری کرده و Δ را می‌یابیم):

5) $x^2 + y^2 + ax + by + cx = 0$ نوشتن معادله مماس از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ بر دایره‌ی

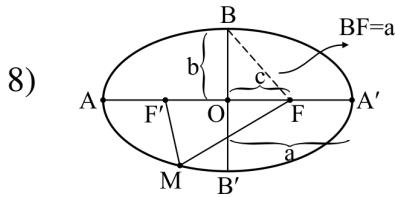
{	اگر نقطه روی دایره بود مشتق ضمنی گرفته و شیب را می‌یابیم.
	اگر نقطه بیرون دایره بود معادله خط را با شیب M نوشته و
	فاصله‌ی مرکز دایره تا خط را برابر شعاع قرار داده و M را می‌یابیم.

6) $d = \sqrt{c(x_0, y_0)}$ طول مماس رسم‌شده از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ بر دایره‌ی

$c(x, y) : x^2 + y^2 + cx + by + c = 0$

7) اگر معادله کلی اقطار دایره‌ای به صورت $ax + by + c = 0$ باشد برای یافتن مرکز دایره کافیست ۲ قطر دلفواه را قطع دهیم.

بیضی



◀ روابط بیضی :

9) $MF + MF' = 2a$ نقطه‌ی دلخواه روی محیط بیضی

10) $b^2 + c^2 = a^2$ رابطه‌ی طلایی بیضی

11) OA برابر BF و BF' است

12) $O = \frac{F + F'}{2}$

◀ اصطلاحات بیضی: (با توجه به شکل)

13) محل برخورد AA' و BB' : O : مرکز تقارن

14) نقاط A و A' یعنی ۲ سر قطر بزرگ : رئوس کانونی

15) نقاط B و B' یعنی ۲ سر قطر کوچک : رئوس ناکانونی

16) F و F' را کوبند F همواره وسط OA نیست) : کانون‌های بیضی

17) پاره خط FF' را کوبند $FF' = 2c$: فاصله‌ی کانونی

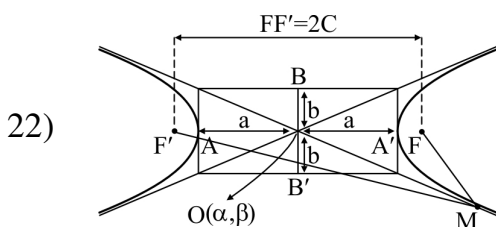
18) $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ معادله‌ی بیضی افقی به مرکز (α, β) و قطرهای $2a$ و $2b$

19) $\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1$ معادله‌ی بیضی قائم به مرکز (α, β) و قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$

20) $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \begin{cases} A < B & \text{بیضی افقی} \\ A > B & \text{بیضی قائم} \end{cases}$ معادله‌ی گسترده‌ی بیضی

21) $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\text{Min}\{A, B\}}{\text{Max}\{A, B\}}}$ خروج از مرکز

هزلولی



23) $|MF' - MF| = 2a$

M نقطه‌ای دلتواه روی یکی از شاخه‌های هزلولی

24) $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow AB = OF = C *$

رابطه‌ی طلایی هزلولی

اصطلاحات هزلولی

25) نقاط F و F' : کانون‌ها

26) نقاط A و A' که 2 رأس کانونی‌اند و رأس ناکانونی نداریم : رئوس

27) پاره خط FF' که برابر 2C است : فاصله کانونی

28) فاصله $2a = AA'$ را کویندر : قطر هزلولی

29) خط AA' یا FF' و همچنین خط BB' : محورهای تقارن

30) $\Rightarrow \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ هزلولی افقی

31) $\Rightarrow \frac{x - \alpha}{a} \pm \frac{y - \beta}{b} = 0$ میانب‌های هزلولی افقی

32) $\Rightarrow \frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$ هزلولی قائم

33) $\Rightarrow \frac{y - \beta}{a} \pm \frac{x - \alpha}{b} = 0$ میانب‌های هزلولی قائم

34) $M = \text{شیب میانب‌های هزلولی افقی} = \pm \frac{b}{a}$

35) $M = \pm \frac{a}{b}$ شیب میانب‌های هزلولی قائم

36) در هزلولی، نوع آن (قائم بودن و نبودن آن) به کوچک و بزرگی مفرج x^2 و y^2 ربطی ندارد.

37) اگر علامت x^2 (+) بود آن‌گاه هزلولی افقی است.

38) اگر علامت x^2 (-) بود آن‌گاه هزلولی قائم است.

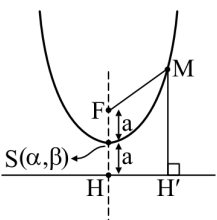
39) اگر معادله‌ی ۲ میانب یک هزلولی به صورت $(ax + by + c = 0)$ و $(a'x + b'y + c' = 0)$ باشد آن‌گاه معادله

$$(a'x + b'y + c')(a'x + b'y + c') = K$$

کسترده‌ی هزلولی به صورت روبرو است.

K مقدار ثابتی است که با داشتن یک نقطه روی هزلولی یافت می‌شود.

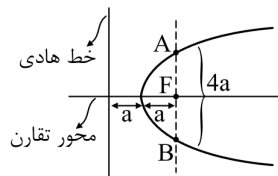
سهمی

40)  $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$
 $S(\alpha, \beta)$ راس = $S(\alpha, \beta)$

41) $MH' = MF$ M نقطه‌ای دلفواه روی هزلولی (MH' پایر عمود بر هادی باشد)

42) $FS = SH = a$

43) $0 =$ مشتق نسبت به متغیر درجه 2 $\Rightarrow$ یافتن محور تقارن سهمی توسط معادله درجه 2

44)  اگر از کانون فطی موازی فط هادی رسم کنیم سهمی را در 2 نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که: $AB = 4a$

45) $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ معادله سهمی افقی

$$46) \quad \tan 2\theta = \frac{b}{a-c}$$

فرمول یافتن زاویه دوران مقطع مخروطی دوران یافته به معادله

$$\text{کسترده } (ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0)$$

$$47) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

X و Y حاصل را در معادله‌ی کسترده قرار داده و مقطع مخروطی را مربع کامل می‌کنیم.

$$48) \quad \text{فرمول‌های مثلثات مربوط} \quad \begin{cases} 1 + \tan^2 2\theta = \frac{1}{\cos^2 2\theta} \\ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{cases}$$

$$49) \quad \underline{ax}^2 + \underline{bxy} + \underline{cy}^2 + dx + ey + f = 0 \quad \begin{cases} \Delta < 0 & \text{بیضی، تپی، نقطه} \\ \Delta = 0 & \text{صفحه، تپی، ۲ خط موازی، یک خط، سهمی} \\ \Delta > 0 & \text{هزلولی، ۲ خط متقاطع} \end{cases}$$

$$50) \quad a=c \text{ و } b=0 \Rightarrow \text{معادله مربوط به دایره می‌گردد.}$$

$$51) \quad A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس مقطع مخروطی}$$

$$52) \quad \text{دترمینان ماتریس مقطع استاندارد} = \text{دترمینان ماتریس مقطع دوران یافته} \quad (\text{به شرط یکی بودن مقادیر ثابت } K)$$

$$53) \quad \text{ماتریس مقطع استاندارد} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 = K$$

◀ استاندارد کردن مقطع در ۲ حالت خاص:

$$54) \quad ax^2 + bxy + ay^2 = K \xrightarrow{\text{استاندارد}} \left(a - \frac{b}{2}\right)x^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)y^2 = K$$

$$55) \quad A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

استاندارد کردن مقطع $ax^2 + bxy + cy^2 = K$ که دارای ماتریس مقابل است.

$$\begin{cases} \lambda^2 - (a+c)\lambda + |A| = 0 & \text{تشکیل معادله روبرو} \\ \lambda_1, \lambda_2 & \text{یافتن ریشه‌های معادله} \\ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = K & \text{تشکیل معادله استاندارد به صورت روبرو} \end{cases}$$

1) $\Rightarrow$ ماتریس قطری $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ تمام عناصر خارج قطر اصلی 0 اند.

2) $\Rightarrow$ ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی یکسانند.

3) $\Rightarrow$ ماتریس همانی (واحد) $I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ اسکالری که قطر اصلی (1) است.

4) $\Rightarrow$ ماتریس بالا مثلثی $\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی (0) است.

5) $\Rightarrow$ ماتریس پایین مثلثی $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی (0) است.

6) $\Rightarrow$ ماتریس $(\bar{O})$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی که همه درآرایش 0 باشد.

7) $\Rightarrow$ ماتریس همانی عضو فنتی ضرب در ماتریس ها

8) $\Rightarrow$ ماتریس $(\bar{O})$ عضو فنتی جمع در ماتریس ها

◀ ویژگی های ضرب ماتریس ها:

9) $AB = 0 \nRightarrow BA = 0$

10) $A(BC) = (AB)C$

$$11) \begin{cases} A(B + C) = AB + AC \\ (B + C)A = BA + CA \end{cases}$$

$$12) AI = IA = A$$

$$13) (rA)(sB) = (rs)AB$$

$$14) AB = KI \Rightarrow BA = KI$$

$$15) AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

$$16) AB = AC \xrightarrow{|A| \neq 0} B = C$$

$$17) I^n = I$$

$$18) A^0 = I$$

$$19) A^m + A^n = A^{(m+n)}$$

ماتریس خود توان:

$$20) A^2 = A \Rightarrow A^n = A, (I - KA)^{-1} = I + \left(\frac{K}{1-K} \right) A$$

تمرین کتاب $\Leftarrow$

$$21) \text{ ویژگی ها } \begin{cases} (I - A)^n = I - A \\ (I + A)^n = I + (2^n - 1)A \end{cases}$$

$\Leftarrow$ ماتریس پوچ توان:

$$22) A^n = \bar{O}$$

$$23) \text{Min}(n) = \text{اندیس پوچ توانی}$$

$$24) \begin{cases} |A| = 0 \\ a + d = 1 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{شروط خود توانی ماتریس}$$

$$25) \quad \begin{cases} |A| = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{شروط پوچ توانی ماتریس}$$

$$26) \quad \text{اگر } A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix}$$

$$27) \quad \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^n = \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix} & \text{زوج } n \\ A^n = \begin{bmatrix} 0 & K^n \\ K^n & 0 \end{bmatrix} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$28) \quad \text{اگر } A^2 = KA \Rightarrow A^n = K^{n-1}A$$

◀ ماتریس ترانپوزده A^T :

$$29) \quad (A^T)^T = A$$

$$30) \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$31) \quad (AB)^T = B^T A^T$$

$$32) \quad (A^n)^T = (A^T)^n$$

$$33) \quad (rA)^T = r(A^T) \Rightarrow (-A)^T = -A^T$$

◀ ماتریس متقارن $A^T = A$:

$$34) \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$35) \quad (A - B)^T = A^T - B^T = A^T - B^T$$

$$36) \quad A^T = A, B^T = B$$

$$37) \quad (rA)^T = rA^T = rA$$

$$38) \quad (A^n)^T = (A^T)^n = A^n$$

$$39) (A^T)^T = A = A^T$$

$$40) (A - I)^T = A - I$$

$$41) (A + I)^T = A + I$$

◀ ماتریس پادمتقارن:

$$42) A^T = -A$$

$$43) A^T = -A, B^T = -B \Rightarrow (A + B)^T = -(A + B)$$

$$44) (A - B)^T = A^T - B^T$$

$$45) (rA)^T = rA^T = r(-A) = -rA$$

46) اگر A پادمتقارن باشد توان‌های زوج A متقارن است و توان‌های فرد A پادمتقارن است.

$$47) A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{مقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمتقارن}}$$

ماتریس به صورت مجموع یک ماتریس مقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته می‌شود.

$$48) \begin{cases} (M_{ij}) \\ \text{مثال } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

ماتریس کُهاد: سطر i و ستون j که از حذف سطر i و ستون j پدید آمده

کُهاد سطر و ستون 2

$$49) \begin{cases} A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \\ \text{مثال } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times -6 = 6$$

همسازه: درایه ij از ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times m}$

$$50) \text{ اگر همسازه درایه‌ای } 0 \text{ شد با تغییرش دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند. } A_{ij} = 0$$

◀ مناسبه‌ی سرعتی همسازه ماتریس 3×3

$$51) \text{ همسازه} = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارجی سطر } 2, 3) \\ -(\text{ضرب خارجی سطر } 1, 3) \\ (\text{ضرب خارجی سطر } 1, 2) \end{bmatrix}$$

$$52) \begin{cases} (A^*)^T = \text{همسازه} \\ (\text{همسازه})^T = A^* \end{cases} \quad \text{ماتریس المافی = ترانژاده‌ی همسازه}$$

◀ مناسبه‌ی سریع ماتریس المافی 3×3

$$53) A^* = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارج سطر } 2, 3) \\ (\text{ضرب خارج سطر } 1, 3) \\ (\text{ضرب خارج سطر } 1, 2) \end{bmatrix}$$

◀ ویژگی‌های A^*

$$54) A^* A = A A^* = I |A|$$

$$55) |A^*| = |A|^{n-1} \quad (n \text{ مرتبه است})$$

$$56) (KA)^* = K^{n-1} A^*$$

$$57) |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$$

$$58) (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

$$59) (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

دترمینان

60) $\det(A) = 0$ اگر سطر یا ستون پیداکردیم که درایه‌های آن مضرب سطر یا ستون دیگری باشند آن‌گاه

61) $|A^T| = |A|$

62) $|BA| = |AB| = |A| |B|$ اگر A و B مربعی و هم مرتبه باشند

63) در ماتریس 2×2 افزودن یا کاستن مقداری ثابت از همه‌ی درایات $\det$ را تغییر نمی‌دهد.

64)
$$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}$$

65)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g \pm ka & h \pm kb & i \pm kc \end{vmatrix}$$

66)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x \pm x' & y \pm y' & z \pm z' \end{vmatrix}$$

67) اگر سطر یا ستونی را در K ضرب کنیم دترمینان (K) برابر می‌شود.

68) $|KA| = K^n |A|$ (n مرتبه ماتریس)

69) در $\det$ می‌توان هر سطری را با سطر دیگری یا ستون با ستون دیگری را جمع و تفریق کرد بی‌آنکه $\det$ تغییر کند.

70) $|A^{-1} \pm B^{-1}| = \frac{|B \pm A|}{|A| |B|}$ قوانین $\det$ برای ماتریس $n \times n$

$$71) \quad |AB| = |BA| = |A| |B|$$

$$72) \quad |A^T| = |A|$$

$$73) \quad |A^n| = |A|^n$$

$$74) \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

◀ مناسبه‌ی سریع $\det (3 \times 3)$

$$75) \quad A = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V}_1 = (a, b, c) \\ \vec{V}_2 = (d, e, f) \\ \vec{V}_3 = (g, h, i) \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$$

ضرب نقطه‌ای ضرب خارجی

$$76) \quad \Gamma^{-1} = I$$

$$77) \quad (rI)^{-1} = \frac{1}{r} I$$

$$78) \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

$$79) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$80) \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$81) \quad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

$$82) \quad AB = I \Rightarrow \begin{cases} A^{-1} = B \\ B^{-1} = A \end{cases}$$

$$83) \quad (KA)^{-1} = \frac{1}{K} A^{-1}$$

$$84) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$85) \quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$$

$$86) \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$87) \quad \text{اگر } A = A^T \quad \text{و} \quad -A = A^T \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T \quad \text{و} \quad (-A^{-1}) = (A^{-1})^T$$

$$88) \quad (A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA$$

$$89) \quad (A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$$

$$90) \quad |A^{-1} \pm B^{-1}| = \frac{|B \pm A|}{|A||B|}$$

$$91) \quad A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

* ماتریس معکوس

$$92) \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$93) \quad A_{ji}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad \text{همسازهی سطر } j \text{ ام و ستون } i \text{ ام از ماتریس } A$$

$$94) \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

◀ ماتریس تبدیل‌های فضا

$$95) \quad T(x, y) = (ax + by, cx + dy) \Rightarrow \text{ماتریس} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$96) \quad T(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (ax + by, cx + dy)$$

$$97) \quad S' = |\det(A)| S \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ به شکل دیگری تبدیل شود}$$

اگر شکلی با مساحت S تحت تبدیل ماتریس A به صورت S' جدید S' به صورت S' در تصویر روبروست.

$$98) \quad \text{اگر ماتریس یک تبدیل } A \text{ و تبدیل دیگری } B \text{ باشد و ماتریس تبدیل متوالی این دو خواسته شد}$$

آن‌ها را از آخر در هم ضرب می‌کنیم. ($BA = \text{ماتریس نهایی}$)

◀ ماتریس دوران (ویژگی‌ها):

$$99) \quad R_\alpha \cdot R_\beta = R_\beta \cdot R_\alpha = R_{(\alpha+\beta)}$$

$$100) \quad |R_\alpha| = 1 \quad \text{دترمینان}$$

$$101) \quad (R_\alpha)^{-1} = (R_\alpha)^T = R_{(-\alpha)}$$

$$102) \quad R(2K\pi + \alpha) = R_\alpha$$

$$103) \quad (R_\alpha)^n = R_{(n\alpha)}$$

فصل پنجم

◀ مدل ماتریس دستگاه معادلات خطی:

$$1) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_B \Rightarrow X = A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

$$2) \quad |A| = 0 \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} & \text{۲ خط موازی بدون جواب} \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} & \text{۲ خط منطبق بی شمار جواب} \end{cases}$$

$$3) \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \text{ و } |A| \neq 0 \quad \text{۲ خط متقاطع و یک جواب}$$

◀ حل دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول به روش کرامر:

$$4) \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

$$5) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \quad \text{A ماتریس ضرایب مجهول}$$

$$6) \quad A_1 = \begin{bmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$7) \quad A_2 = \begin{bmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{bmatrix} \Rightarrow y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$8) \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{bmatrix} \Rightarrow z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

◀ تعداد جواب‌های معادله ۳ مجهولی توسط دترمینان‌ها :

9) $|A| \neq 0$ جواب منحصربه‌فرد

10) $|A| = 0 \begin{cases} |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0 & \text{بی‌شمار جواب} \\ \Rightarrow \text{در غیر این صورت} & \text{جواب ندارد} \end{cases}$

◀ روش حذفی گاوس:

$$11) \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{bmatrix}$$

به کمک جمع و تفریق ستون‌ها و سطرها در ماتریس که از ویژگی‌های

مماسیه‌ی $\det$ است (ابتدا a' را صفر می‌کنیم سپس a'' سپس b'')