

حل روابط بازگشتی ناممکن با ضرایب ثابت

جنر اوج بک

گروه آموزشی ریاضی پیام نور مرکز بولکان

❶ روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

- ❶ روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت
- ❷ جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

- ❶ روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت
- ❷ جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \quad (1)$$

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \quad (1)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغیر n می باشد.

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \quad (1)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغیر n می باشد.

جواب عمومی روابط بازگشتی مرتبه دوم ناهمگن

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \quad (1)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغیر n می باشد.

جواب عمومی روابط بازگشتی مرتبه دوم ناهمگن

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

که در آن $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$$

و $a_n^{(p)}$ یک جواب خصوصی برای رابطه (1) می باشد. جواب خصوصی یک معادله به جمله $f(n)$ بستگی دارد.

جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

❶ اگر $f(n) = r^n$ که در آن $r \neq 0$:

$a_n^{(p)} = Ar^n$ ریشه معادله مشخصه نباشد

جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

❶ اگر $f(n) = r^n$ که در آن $r \neq 0$:

(۱) ریشه معادله مشخصه نباشد $a_n^{(p)} = Ar^n$

(۲) اگر r ریشه معادله مشخصه با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = An^s r^n$

مثال برای حالت اول: r ریشه معادله مشخصه نباشد $a_n^{(p)} = Ar^n$

رابطه بازگشتی ناهمگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 1 & (n \geq 2) \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

رابطه بازگشتی $a_{n+1} - 2a_n = 1$ ناهمگن است. برای حل آن ابتدا رابطه بازگشتی همگن $a_{n+1} - 2a_n = 0$ را حل می کنیم. سپس جواب خصوصی را با توجه به اینکه $f(n) = r^n$ (که در اینجا $r = 1$ و $n = 1$) می باشد، تعیین می کنیم.

$$a_n = r^n \Rightarrow r^{n+1} - 2r^n = 0 \Rightarrow r^n(r - 2) = 0 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین $a_n^{(h)} = c(2)^n$ جواب عمومی رابطه بازگشتی است. می بینیم که 1 ریشه معادله مشخصه نیست، لذا $a_n^{(p)} = A$.

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی ناهمگن به صورت زیر است:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c(2)^n + A$$

در ادامه بایستی ضرایب ثابت c , A را تعیین کنیم.
برای تعیین A جواب خصوصی $a_n^{(p)} = A$ را در دنباله بازگشتی اولیه قرار می دهیم.
بنابراین

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 \Rightarrow A - 2A = 1 \Rightarrow A = -1$$

لذا $a_n = c(2)^n - 1$ ؛ کافیت ثابت c را پیدا کنیم که این هم با توجه به شرایط مرزی به سادگی به دست می آید:

$$1 = a_1 = c(2) - 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\text{لذا } a_n = 2^n - 1 \quad (n \geq 2)$$

مثال برای حالت دوم: اگر r ریشه معادله مشخصه با تکرار s باشد

$$a_n^{(p)} = An^s r^n$$

رابطه بازگشتی ناهمگن زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n & (n \geq 2) \\ a_0 = 7 & a_1 = 1 \end{cases}$$

حل رابطه بازگشتی همگن $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$

$$\begin{aligned} a_n = r^n &\Rightarrow r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - 5r + 6) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن عبارتست از:

$$a_n^{(h)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$

$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$

$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

$$2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2)$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$

$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

$$2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2)$$

$$4An - 10A(n-1) + 6A(n-2) = 4$$

$$\Rightarrow 4An - 10An + 10A + 6An - 12A = 4$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$

$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

$$2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2)$$

$$4An - 10A(n-1) + 6A(n-2) = 4$$

$$\Rightarrow 4An - 10An + 10A + 6An - 12A = 4$$

$$\Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A = -2$$

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$ ، از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases}$$

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$ ، از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 16, c_2 = -9$$

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$ از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 16, c_2 = -9$$

$$a_n = 16(2)^n - 9(3)^n - 2n(2)^n$$

همانطور که بیان شد جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت با توجه به شکل جمله ناهمگن یعنی $f(n)$ مشخص می شود. برای مشاهده تمام حالت های ممکن جدول 7 - 1 کتاب درسی را مشاهده کنید.