(۱) هر کدام از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(۱) $lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} Ln(e^{x+yz})$

(۲) $lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

---

(۲) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ باشد. مشتقات نسبی(جزئی) f_{xx}, f_x را در نقطهٔ $(0,0)$ به دست بیاورید.

---

(۳) تابع u با معادله ای به شکل $u(x,y)=xy\ f(\dfrac{x+y}{xy})$ تعریف شده است. اولاً نشان دهید که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند، ثانیاً $G(x,y)$ را به دست آورید.

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}=u\ G(x,y)$$

---

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$$

---

(۵) دیفرانسیل کامل تابع زیر را به ازای $dx=0/1, dy=-0/1, x=1, y=3$ محاسبه نمایید.

$$f(x,y)=x+Ln(x^2+y^2)$$

---

(۶) ماکزیمم ومینی مم تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را به ازای $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ به دست آورید.

---

(۷) فرض کنید که ماتریس $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ متقارن باشد. **اولاً** مقدار m,n را بیابید، **ثانیاً** $det(A^T)$ را حساب کنید.

---

(۸) دستگاه سه معادله، سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ -x+3y+2z=-5\end{cases}$$

---

(۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار k را طوری بیابید که بردارهای $(0,k+2,8), (2,k,-4), (1,-1,k-1)$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشند.

ب) اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x+2y \\ -x \\ 2x-5y\end{bmatrix}$ یک تابع خطی باشد، ماتریس نمایشگر آن را بیابید.

پاسخنامه تشریحی

جواب سوال ۱)

$(۱)\ \ lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,۱)} Ln(e^{x+yz}) = Ln(e^{۱+(۰\times۱)}) = Lne = ۱$

$(۲)\ \ lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{xy}{x^۲+y^۲}$

اگر نقطه را مستقیما جایگذاری نماییم حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ به دست می آید. کافیست از تبدیل زیر استفاده کنیم:

$x = rcos(\theta)\ ,\ y = rsin(\theta)$ لذا وقتیکه نقطه به مبدا میل می کند $r\to ۰$

$$\begin{aligned} lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲} &= lim_{r\to۰} \frac{rcos(\theta)rsin(\theta)}{r^۲cos^۲(\theta)+r^۲sin^۲(\theta)} \\ &= lim_{r\to۰} \frac{r^۲cos(\theta)sin(\theta)}{r^۲(cos^۲(\theta)+sin^۲(\theta))} \\ &= \frac{۱}{۲}sin(۲\theta) \end{aligned}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است لذا این حد وجود ندارد.

جواب سوال ۲)

$$f_x(۰,۰) = lim_{h\to۰} \frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h} = lim_{h\to۰} \frac{\frac{h^۳+۰}{h^۲+۰} - ۰}{h} = ۱$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{۳x^۲(x^۲+y^۲) - ۲x(x^۳+y^۳)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۱ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

$$f_{xx}(۰,۰) = lim_{h\to۰} \frac{f_x(h,۰)-f_x(۰,۰)}{h} = lim_{h\to۰} \frac{۱-۱}{h} = ۰$$

جواب سوال ۳)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf(\frac{x+y}{xy}) + xyf'(\frac{x+y}{xy})\frac{xy-y(x+y)}{x^۲y^۲} = yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf(\frac{x+y}{xy}) + xyf'(\frac{x+y}{xy})\frac{xy-y(x+y)}{x^۲y^۲} = xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})$$

در معادله قرار می دهیم؛ داریم:

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x} - y^۲\frac{\partial u}{\partial y} = x^۲(yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy})) - y^۲(xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})) = \underbrace{xyf(\frac{x+y}{xy})}\,(x-y) = u\,G(x,y)$$

چون $u\neq ۰$ لذا $G(x,y) = x-y$ می باشد.

جواب سوال ۴) داریم: $f(x,y) = x^۲ - ۲xy + \frac{۱}{۳}y^۳ - ۳y$

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزیی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ۰ \Rightarrow ۲x-۲y=۰ \Rightarrow x=y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ۰ \Rightarrow -۲x+y^۲-۳=۰ \Rightarrow y^۲-۲y-۳=۰ \Rightarrow y=۳,-۱ \end{cases}$$

(چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم $x=y$)

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(-۱,-۱)$, $(۳,۳)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$$A = f_{xx} = ۲\ ,\ B = f_{xy} = -۲\ ,\ C = f_{yy} = ۲y \Longrightarrow \Delta = B^۲ - AC$$

برای نقطه بحرانی $(۳,۳)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲\times۶) = ۴-۱۲ = -۸ < ۰$، از طرفی داریم: $A = ۲ > ۰$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(-۱,-۱)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲\times -۲) = ۴ - (-۴)\ldots = ۸ > ۰$، لذا نقطه زین اسبی است.

جواب سوال ۵) دیفرانسیل کامل تابع دومتغییره f را با df نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$f(x,y) = x + Ln(x^۲+y^۲) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = ۱ + \frac{۲x}{x^۲+y^۲}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۲y}{x^۲+y^۲}$$

$$\Longrightarrow df = (۱ + \frac{۲x}{x^۲+y^۲})dx + \frac{۲y}{x^۲+y^۲}dy$$

لذا با جایگذاری مقادیر $y = ۳, x = ۱, dy = -۰/۱, dx = ۰/۱$ خواهیم داشت: $df = ۰/۰۶$.

جواب سوال ۶) بنا به فرض مساله داریم: $f(x,y) = x^۲ + y^۲\ ,\ g(x,y) = \frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} - ۱ = ۰$، لذا تابع لاگرانژین و به تبع آن دستگاه لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$L(x,y)=x^۲+y^۲+\lambda(\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}-۱)\ ،\ \begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=۰\Longrightarrow ۲x+\frac{\lambda}{۲}=۰\Longrightarrow x=-\frac{\lambda}{۴}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=۰\Longrightarrow ۲y+\frac{\lambda}{۳}=۰\Longrightarrow y=-\frac{\lambda}{۶}\\ \frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱\end{cases}$$

با جایگذاری x,y در معادله سوم، مقدار $\lambda=-\frac{۷۲}{۱۳}$ به دست می آید. با جاگذاری مقدار λ خواهیم داشت:

$$x=\frac{۷۲}{۵۲}\quad,\quad y=\frac{۷۲}{۷۸}\Longrightarrow f(\frac{۷۲}{۵۲},\frac{۷۲}{۷۸})=\frac{۳۶}{۱۳}$$

جواب سوال ۷) با توجه به اینکه ماتریس متقارن است لذا به ازای هر $i,j=۱,۲,۳$ خواهیم داشت: $a_{ij}=a_{ji}$. لذا در ماتریس

$$A=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & m-۱\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{pmatrix}$$

$$n+۱=۴\ ,\ m-۱=۰\Longrightarrow n=۳\ ,\ m=۱$$

می دانیم در ماتریس های متقارن $A=A^T$ است، لذا:

$$A=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۳\end{pmatrix}\Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۳\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(A^T)=۲\times((-۱\times ۳)-۰)-۱\times((۱\times ۳)-۰)+۴\times((۱\times ۰)-(-۱\times ۴))=۷$$

جواب سوال ۸) ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل و سپس با عملیات سطری مقدماتی به ماتریس قطری تبدیل می کنیم:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}۱ & ۴ & ۳ & ۱\\ ۲ & ۵ & ۴ & ۴\\ -۱ & ۳ & ۲ & -۵\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲\end{array}\right)\Longrightarrow x=۳,y=-۲,z=۲$$ (نوشتن مراحل تبدیل ماتریس در امتحان الزامی است)

جواب ۹-الف) با اعمال شرط استقلال خطی، یعنی $det\begin{pmatrix}۱ & -۱ & k-۱\\ ۲ & k & -۴\\ ۰ & k+۲ & -۸\end{pmatrix}\neq ۰$ خواهیم داشت: $۲k^۲-۲k-۱۲\neq ۰$ لذا برای اینکه بردارها مستقل خطی باشند بایستی k ریشه معادله درجه دوم به دست آمده **نباشد**. پس ریشه های معادله درجه دوم فوق را به دست می آوریم: $k=۳,-۲$ بنابراین به ازای $k\neq ۳,-۲$ بردارها مستقل خطی هستند.

جواب ۹-ب) پایه های استاندارد $B_۱=\{(۱,۰),(۰,۱)\}$ در $\mathbb{R}^۲$ و $B_۲=\{(۱,۰,۰),(۰,۱,۰),(۰,۰,۱)\}$ در $\mathbb{R}^۳$ را در نظر می گیریم. لذا تصویر پایه $B_۱$ تحت f را برحسب پایه $B_۲$ می نویسیم.

$$f\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳\times ۱)+(۲\times ۰)\\ -۱\\ (۲\times ۱)-(۵\times ۰)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}-۱\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳\times ۰)+(۲\times ۱)\\ ۰\\ (۲\times ۰)-(۵\times ۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۰\\ -۵\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}+۰\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{ماتریس نمایشگر}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$ دقت کنید که ضرایب ستون های ماتریس را تشکیل می دهند.

با آرزوی موفقیت و شادکامی /اوج بگ / پاییز ۱۳۹۲