(۱) **تغییر مرتبه انتگرال های دوگانه** بسیاری از مسایل انتگرال با تعویض ترتیب انتگرال قابل حل هستند. یعنی ممکن است شکل $x-$ منظم آن قابل حل نباشد و یا اینکه به سختی حل شود، ولی شکل $y-$ منظم آن چنین نباشد.

$$\int\int_D f\ dx\ dy = \int_a^b \Big[\int_{h(x)}^{l(x)} f(x,y)\ dy\Big]dx$$

مثال: حاصل انتگرال دوگانه زیر را بعد از تغییر مرتبه حساب کنید.

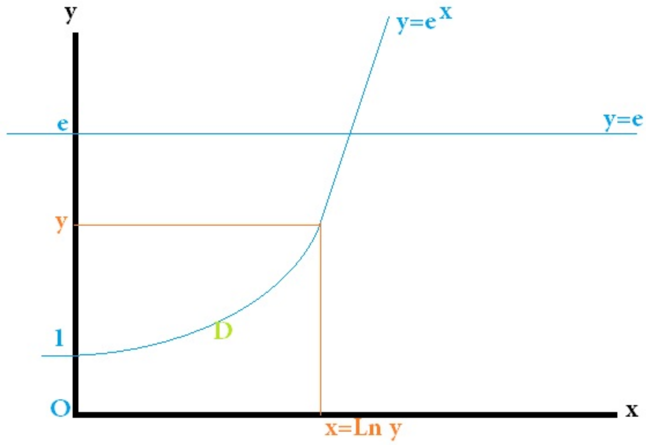
$$\int_۰^۱ \Big[\int_{e^x}^{e} \frac{۱}{Ln\ y}\ dy\Big]dx$$

حل: ابتدا ناحیه مورد انتگرال، که آن را D می نامیم؛ در صفحه xOy رسم می کنیم. (شکل ۱ را ببینید) برای این منظور خطوط $x=۱$, $x=۰$ و $y=e$ و منحنی $y=e^x$ را رسم می کنیم. در تعویض ترتیب حدود مشاهده می شود که y بین ۱ تا e تغییر می کند و اگر y را بر محور y ها در نظر بگیریم آنگاه x می تواند از ۰ تا $Ln\ y$ تغییر کند. بنابراین

$$D=\{(x,y)|۰\le x\le ۱, e^x\le y\le e\} = \{(x,y)|۱\le y\le e, ۰\le x\le Ln\ y\}$$

در نتیجه

$$\int_۰^۱ \Big[\int_{e^x}^{e} \frac{۱}{Ln\ y}\ dy\Big]dx = \int\int_D \frac{dx\ dy}{Ln\ y} = \int_۱^e \Big[\int_۰^{Ln\ y} \frac{dx}{Ln\ y}\Big]dy = \int_۱^e \Big[\frac{x}{Ln\ y}\Big]_۰^{Ln\ y} dy = \int_۱^e dy = e-۱$$



تمرین: به کمک تعویض ترتیب حدود، انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_۰^{۱۲} \Big[\int_{-\sqrt{y/۳}}^{\sqrt{y/۳}} e^{x^۳-۱۲x}\ dx\Big]dy \quad ، \quad \int_۰^{\pi} \Big[\int_x^{\pi} \frac{sin\ y}{y}\ dy\Big]dx$$

(۲) **قضیه گرین:** فرض کنید C یک منحنی ژردان است و $F = \overrightarrow{(P, Q)}$ میدانی برداری است که بر C به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است و C دارای جهت استاندارد است در اینصورت

$$\oint_C F \cdot dr = \int\int_C (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy$$

مثال: با استفاده از قضیه گرین انتگرال زیر را محاسبه کنید، که در آن C منحنی حاصل از تلاقی $z = -x^۲ - y^۲ + ۵$ با صفحه xOy است و جهت انتگرال گیری در جهت مثلثاتی است.

$$\int_C (y^۲ - x)dy + (x^۲ + ۲xy)dx$$

حل: منحنی C به صورت مقطع $z = -x^۲ - y^۲ + ۵$ با صفحه $z = ۰$ است لذا $z = ۰$, $C : x^۲ + y^۲ = ۵$ بنابراین داخل C عبارت است از $D : x^۲ + y^۲ \leq ۵$ و بنابر قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned} I = \oint_C (y^۲ - x)dy + (x^۲ + ۲xy)dx &= \oint_C (x^۲ + ۲xy)dx + (y^۲ - x)dy \\ &= \int\int_D \Big[(\frac{\partial(y^۲ - x)}{\partial x} - \frac{\partial(x^۲ + ۲xy)}{\partial y})\Big]\, dx\, dy \\ &= -\int\int_D (۱ + ۲x)dxdy \\ &= -\int_۰^{۲\pi} \Big[\int_۰^{\sqrt{۵}} (۱ + ۲rcos(\theta))rdr\Big]d\theta \\ &= \int_۰^{۲\pi} \Big[-\frac{r^۲}{۲} - ۲\frac{r^۳}{۳}cos(\theta)\Big]_۰^{\sqrt{۵}} d\theta \\ &= \int_۰^{۲\pi} \Big[\frac{-۵}{۲} - \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۳}cos(\theta)\Big]d\theta \\ &= \Big[\frac{-۵}{۲}\theta - \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۳}sin(\theta)\Big]_۰^{۲\pi} \\ &= -۵\pi \end{aligned}$$

تمرین: درستی یا عدم درستی قضیه گرین را برای میدان برداری

$$F(x, y) = \frac{-y}{x^۲ + y^۲}i + \frac{x}{x^۲ + y^۲}j$$

بر ناحیه D محصور بین دو دایره $x^۲ + y^۲ = ۱, x^۲ + y^۲ = ۴$ تحقیق کنید.