

(۱) هر کدام از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(۱) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \ln(e^{x+yz})$

(۲) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(۲) فرض کنید $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(۳) تابع u با معادله ای به شکل $u(x,y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ تعریف شده است. اولاً شان دهید که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند، ثانیاً $G(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$ را به دست آورید.

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u G(x,y)$$

(۴) نقاط ماقسیم و مینیم نسبی و زین اسپی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

(۵) دیفرانسیل کامل تابع زیر را به ازای $dx = 0/1, dy = -0/1, x = 1, y = 3$ محاسبه نمایید.

$$f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$$

(۶) ماکزیم و مینیمم تابع $f(x,y) = x^2 + y^2$ به دست آورید.

(۷) فرض کنید که ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ را حساب کنید.

(۸) دستگاه سه معادله، سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ -x + 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

(۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار k را طوری بباید که بردارهای $(1, -1, k-1), (2, k, -4), (0, k+2, 8)$ در \mathbb{R}^3 مستقل خطی باشند.

ب) اگر $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ -x \\ 2x-5y \end{bmatrix}$ یک تابع خطی باشد، ماتریس نمایشگر آن را بباید.

http://aoujbag.sub.ir	http://rayeshmand.ir
وبسایت شخصی جعفر اوچ بگ	رایشمند مرجع تخصصی ریاضی

جواب سوال (۱)

$$(1) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \ln(e^{x+yz}) = \ln(e^{1+(0 \times 0)}) = \ln e = 1$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

اگر نقطه را مستقیماً جایگذاری نماییم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ به دست می آید. کافیست از تبدیل زیر استفاده کنیم:

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta) \rightarrow r \text{ لذا نقطه به مبدأ میل می کند}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r\cos(\theta)r\sin(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \frac{1}{2}\sin(2\theta) \end{aligned}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است لذا این حد وجود ندارد.

جواب سوال (۲)

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 + 0}{h} - 0}{h} = 1 \\ f_x(x,y) &= \begin{cases} \frac{\frac{3}{2}x^2(y^2 + y^2) - 2x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ f_{xx}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

جواب سوال (۳)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{xy - y(x+y)}{x^2y^2} = yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{xy - y(x+y)}{x^2y^2} = xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \end{aligned}$$

در معادله قرار می دهیم؛ داریم:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\left(yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right) - y^2\left(xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right) = \underbrace{xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)}_{G(x,y)}(x-y) = u G(x,y)$$

چون $0 \neq u$ لذا $G(x,y) = x-y$ می باشد.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

جواب سوال (۴) داریم:

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزئی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2x + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3, -1 \end{cases}$$

چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم $x = y$

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(-1, -1), (0, 0), (3, 3)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$$A = f_{xx} = 2, B = f_{xy} = -2, C = f_{yy} = 2y \implies \Delta = B^2 - AC$$

برای نقطه بحرانی $(0, 0)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times 0) = 4 - 0 = 4 > 0$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(3, 3)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0 < 0$ لذا این نقطه زین اسپی است.

جواب سوال (۵) دیفرانسیل کامل تابع دو متغیره f را با df نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\implies df = \left(1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right)dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy$$

لذا با جایگذاری مقادیر $x = 1, y = 3$ خواهیم داشت: $df = 0/1, dy = -0/1, dx = 0/1$

جواب سوال (۶) بنا به فرض مساله داریم: $f(x,y) = x^2 + y^2, g(x,y) = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ به تبع آن دستگاه لامگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

۳

$$L(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1\right), \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies 4x + \frac{\lambda}{4} = 0 \implies x = -\frac{\lambda}{4} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \implies 4y + \frac{\lambda}{3} = 0 \implies y = -\frac{\lambda}{6} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

با جایگذاری y , x در معادله سوم، مقدار $\lambda = -\frac{72}{13}$ به دست می آید. با جایگذاری مقدار λ خواهیم داشت:

$$x = \frac{72}{52}, \quad y = \frac{72}{78} \implies f\left(\frac{72}{52}, \frac{72}{78}\right) = \frac{36}{13}$$

جواب سوال ۷) با توجه به اینکه ماتریس متقابران است لذا به ازای هر $i, j = 1, 2, 3$ خواهیم داشت: $a_{ij} = a_{ji}$. لذا در ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n+1 = 4, \quad m-1 = 0 \implies n = 3, \quad m = 1$$

می دانیم در ماتریس های متقابران $A = A^T$ است، لذا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(A^T) = 2 \times ((-1 \times 3) - 0) - 1 \times ((1 \times 3) - 0) + 4 \times ((1 \times 0) - (-1 \times 4)) = 7$$

جواب سوال ۸) ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل و سپس با عملیات سطحی مقدماتی به ماتریس قطری تبدیل می کنیم:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \implies x = 3, y = -2, z = 2$$

(نوشتن مراحل تبدیل ماتریس در امتحان الزامی است)

$$\text{جواب ۹-الف) با اعمال شرط استقلال خطی، یعنی } 0 \neq \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k-1 \\ 2 & k & -4 \\ 0 & k+2 & -8 \end{pmatrix} \text{ لذا برای اینکه بردارها مستقل}$$

خطی باشند بایستی k ریشه معادله درجه دوم به دست آمده نباشد. پس ریشه های معادله درجه دوم فوق را به دست می آوریم: $k = -2, 3$. بنابراین به ازای $k \neq -2, 3$ بردارها مستقل خطی هستند.

جواب ۹-ب) پایه های استاندارد $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ در \mathbb{R}^3 را در نظر می گیریم. لذا تصویر پایه تحت f را بحسب پایه $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ نویسیم.

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (2 \times 0) \\ -1 \\ (2 \times 1) - (5 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 0) + (2 \times 1) \\ 0 \\ (2 \times 0) - (5 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ماتریس نمایشگر} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{دقت کنید که ضرایب ستون های ماتریس را تشکیل می دهند.}$$