

پانچ تشریحی آزمون میان ترم درس آمار و احتمال (رشته مهندسی صنایع)

■ سوالات OPEN BOOK (هر سوال ۳ نمره دارد) [مهلت تحویل جواب ها تا تاریخ ۱۳۹۳/۰۲/۲۸ می باشد]

(۱) فرض کنید $n + 1$ آوند به شماره های 0 تا n در اختیار داریم، به قسمی که i مین آوند دارای i مهره قرمز و $n - i$ مهره سفید است، $0 < i < n$. یک آوند را به تصادف انتخاب کرده و سپس به تصادف مهره های آن را یکی بعد از دیگری و با جایگذاری خارج می کنیم. اگر m مهره اول همه قرمز باشند احتمال آنکه $(m + 1)$ مین مهره نیز قرمز باشد چقدر است؟
حل: پیشامدهای زیر را در نظر می گیریم:

A_i پیشامد انتخاب آوند i -م:

R_m یعنی m مهره انتخابی اول همگی قرمز باشند

R پیشامدی که می گوید $1 + m$ مین مهره قرمز باشد

با فرض وقوع A_i ، پیشامدهای R, R_m به طور شرطی مستقل هستند. بنابراین:

$$P(R|R_m A_i) = P(R|A_i) = \frac{i}{n} \quad (*)$$

بنا بر فرمول بیز داریم:

$$P(A_i|R_m) = \frac{P(R_m|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=0}^n P(R_m|A_k)P(A_k)} = \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^m \left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m \left(\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^m}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m} \quad (**)$$

اکنون برای محاسبه $P(R|R_m)$ از برابری زیر استفاده می کنیم:

$$P(R|R_m) = \sum_{i=0}^n P(R|R_m A_i)P(A_i|R_m) \quad ***$$

در نتیجه با جایگذاری (*) و (**) در (***) خواهیم داشت:

$$P(R|R_m) = \frac{\sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{m+1}}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m}$$

اکنون برای محاسبه سری های صورت و مخرج از انتگرال معین کمک می گیریم، از ریاضیات (۱) به یاد داریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

بنابراین:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{m+1} = \int_0^1 x^{m+1} dx = \left. \frac{x^{m+2}}{m+2} \right|_0^1 = \frac{1}{m+2}$$

به صورت مشابه:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m = \int_0^1 x^m dx = \left. \frac{x^{m+1}}{m+1} \right|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر در می آید:

$$P(R|R_m) = \frac{\sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{m+1}}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m} = \frac{\frac{1}{m+2}}{\frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m+2}$$

(۲) بیماری هموفیلی یک بیماری ارثی است. اگر مادری به این بیماری مبتلا باشد، آنگاه با احتمال $\frac{1}{4}$ هر یک از فرزندان پسرش مستقلاً این بیماری را به ارث می‌برند. در غیر اینصورت هیچ یک از فرزندان این مادر هموفیلی نمی‌شوند. خانمی مادر ۲ پسر است و پرونده پزشکی خانواده او نشان می‌دهد که با احتمال $\frac{1}{4}$ این خانم هموفیلی است. مطلوب است احتمال آنکه (الف) اولین پسر فرزند این خانم هموفیلی باشد، (ب) دومین فرزند پسر این خانم هموفیلی باشد، (ج) هیچ یک از فرزندان پسر این خانم هموفیلی نباشند.

حل: پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

H_1, H_2, H به ترتیب پیشامد اینکه خانم، پسر اول و پسر دوم او هموفیلی باشد. به شرط وقوع H ، H_1, H_2 به طور شرطی مستقل اند. اما اگر یکی از پسران هموفیلی باشد، در این صورت مادر هموفیلی است و با احتمال $\frac{1}{4}$ پسر دیگر نیز هموفیلی است.

الف) داریم:

$$P(H_1) = P(H_1|H)P(H) + P(H_1|H^c)P(H^c) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{16}$$

ب) داریم: مشابهاً:

$$P(H_2) = \frac{1}{16}$$

ج) داریم:

$$P(H_1^c H_2^c) = P((H_1^c H_2^c|H)P(H) + P((H_1^c H_2^c|H^c)P(H^c))$$

از طرفی داریم:

$$P((H_1^c H_2^c|H^c) = 1$$

همچنین:

$$P((H_1^c H_2^c|H) = P(H_1^c|H)P(H_2^c|H) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

در نتیجه

$$P(H_1^c H_2^c) = P((H_1^c H_2^c|H)P(H) + P((H_1^c H_2^c|H^c)P(H^c) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{16}$$

موفق باشید، اوج بک