

فصل اول: اعداد و توابع

اعداد طبیعی: مجموعه این اعداد را با نماد \mathbb{N} نشان می دهیم و $\{1, 2, 3, \dots\}$ توجه داریم که این مجموعه نسبت به اعمال $+$ و \times بسته است. معادلات $x + 1 = 0$ و $x \cdot 1 = 0$ در این مجموعه جواب ندارند.

اعداد صحیح: مجموعه اعداد صحیح را با نماد \mathbb{Z} نشان می دهیم و $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ می باشد. مجموعه اعداد صحیح نسبت به اعمال $+$, \times و $-$ بسته است. عدد ۱ عضو ختنی عمل \times و عدد صفر عضو ختنی عمل $+$ است.

نکته: در بین دو مجموعه \mathbb{N} و \mathbb{Z} یک تناضر یک به یک وجود دارد، درواقع میتوان گفت که به بیان ریاضی میتوان یک تابع f و پوشایین این دو مجموعه برقرار کرد.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 2k \\ \frac{1-n}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ است، آیا می توان گفت تعداد اعضای \mathbb{N} از اعضای \mathbb{Z} کمتر است؟

معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ در \mathbb{Z} دارای جواب نیست پس \mathbb{Z} نیز باید تکمیل شود.

اعداد گویا: این مجموعه را با نماد \mathbb{Q} نشان می دهیم که $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \right\}$. این مجموعه نسبت

به اعمال $+$, \times و $-$ بسته است. عضو $\frac{1}{a}$ را وارون ضربی a می گوییم. معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ در \mathbb{Q} ریشه ندارد، بنابراین این مجموعه کاملی از اعداد نیست و نیاز به تکمیل دارد.

توجه داشته باشید که اعداد گویا یک مجموعه چگال را تشکیل می دهند، یعنی بین هر دو عدد گویا یک عدد گویا وجود دارد!

به بیان دیگر هیچ دو عدد گویا را نمی توان یافت که کنار همدیگر باشند. اما با توجه به این که معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ در این مجموعه دارای جواب نیست، این مجموعه با وجود چگال بودن دارای رخنه هایی نیز هست.

اعداد حقیقی: مجموعه این اعداد را با \mathbb{R} نمایش می دهیم، برای معرفی \mathbb{R} ابتدا باید تعریفی از غیر گویا (اصم) داشته باشیم که مجموعه این اعداد با اعداد گویا مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهند. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^C = \mathbb{R}$

اعداد اصم یا غیر گویا: اعدادی هستند که بسط اعشاریشان نامتناهی بوده و دارای هیچ دوره گردشی نباشد. این تعریف به طور مستقیم از تعریف عدد گویا حاصل می شود. همانطور که می دانیم در نمایش بسط اعشاری یک عدد، اگر عدد دارای بسط اعشاری متناهی بوده و یا دارای دوره گردش باشد، آن عدد یک عدد گویا است.

مثلاً اعداد $\pi = 3.141522 \dots$ و $\sqrt{2} = 1.414213 \dots$ اعداد اصم می باشند.

مثال: دو عدد اصم α و β بیاورید بطوریکه α^β گویا باشد.

$$\alpha = 2^{\sqrt{2}} \quad \beta = \sqrt{2} \quad \alpha^\beta = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

خواص جبری \mathbb{R}

مجموعه \mathbb{R} با دو عمل $+$ و \times دارای خواص زیر است:

A1) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad x(yz) = (xy)z \quad$ (شرکت پذیری)

A2) $x + y = y + x \quad xy = yx \quad$ (جابجایی)

A3) $x + x' = x \quad x \times x^* = x \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists x' \in \mathbb{R} \quad \exists x^* \in \mathbb{R})$

A4) $x + x' = 0 \quad x \times x^* = 1 \quad$ (عضو قرینه و وارون ضربی)

A5) $x(y + z) = xy + xz \quad$ (پخش ضرب نسبت به جمع)

اعمال تفاضل و تقسیم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x - y = x + (-y) \quad x \div y = x \times \frac{1}{y}$$

سوال: نشان دهید: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 = 0$

A3 $\Rightarrow 0 + 0 = 0$

A5 $\Rightarrow x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$

A4 $\Rightarrow \exists y' \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 + y' = 0$

بنابراین

$$0 = y' + x \cdot 0 = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + y' = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + y') = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$$

خواص ترتیبی

مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} زیر مجموعه ای دارد و \mathbb{R}^+ که شامل تمام اعدادی است که در خواص زیر صدق می کند، این مجموعه، مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت نامیده می شود.

۱. به ازای هر عدد حقیقی x ، فقط یکی از معادلات زیر درست است:

$$x \in \mathbb{R}^+ ; \quad x = 0 , \quad -x \in \mathbb{R}^+$$

۲. اگر $x + y \in \mathbb{R}^+$ آنگاه $x, y \in \mathbb{R}^+$

اگر فرض کنیم که \mathbb{R}^+ موجود است. می توان یک رابطه ترتیبی بصورت زیر را در \mathbb{R} تعریف کرد:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{if } y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x < y$$

یعنی x کمتر از y است و

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{if } y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x > y$$

یعنی x بیشتر از y است.

با توجه به این نمادگذاری و خواص جبری اعداد حقیقی می توان \mathbb{R}^+ را به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

۳- برای هر عدد حقیقی y , x دقیقاً یکی از عبارات زیر صحیح است:

$$x > y \quad ; \quad x = y \quad ; \quad x < y$$

۴- اگر $x, y, z \in \mathbb{R}$ باشد، بطوریکه $y < z$ و $x < y$ آنگاه $x < z$

۵- اگر $x, y, z \in \mathbb{R}$ باشد، بطوریکه $y < z$ آنگاه $x + z < y + z$

۶- اگر $x < y$ و $z > 0$ باشد، آنگاه $xz < yz$ و اگر $z < 0$ و $xz > yz$

مثال: نشان دهید $1 > 0$

طبق رابطه ۳، $0 > 1$ یا $1 < 0$ است.

طبق رابطه ۶ خواهیم داشت:

$$\text{if } 0 > 1 \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow (-1)(-1) > 0 \times (-1) \Rightarrow 1 > 0$$

که با فرض $1 > 0$ در تناقض است. بنابراین $0 > 1$ است.

مجموعه های کراندار و بی کران

فرض کنید S یک زیرمجموعه \mathbb{R} باشد.

* از بالا کراندار است، اگر

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \forall x \in S, \quad x \leq \alpha$$

و α یک کران بالا نامیده می شود.

* از پایین کراندار است، اگر

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \forall x \in S, \quad x \geq \beta$$

و β یک کران پایین نامیده می شود.

* S یک مجموعه کراندار نامیده می شود، اگر از بالا و پایین کراندار باشد. در غیر این صورت S یک مجموعه بی کران است.

سوال: نشان دهید مجموعه تهی یک مجموعه کراندار است.

از آنجایی که \emptyset هیچ عضوی ندارد، دو عدد حقیقی یک کران بالا و یک کران پایین برای \emptyset می باشد. بنابراین کراندار است.

سوال: مجموعه $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ کراندار است. می توان ۲ را کران بالا و -۲ را کران پایین در نظر گرفت.

مثال: مجموعه \mathbb{N} از پایین کراندار است اما از بالا کراندار نیست. (چرا؟) هر عدد $1 \leq \beta$ را می توان به عنوان کران پایین در نظر گرفت.

مثال: مجموعه $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ کراندار است. هر عدد حقیقی $\alpha \geq 1$ یک کران بالا و هر عدد حقیقی $0 \leq \beta$ یک کران پایین آن می باشد.

کوچکترین کران بالا یا **Supremum** (زیرینه)

فرض کنید S یک زیرمجموعه \mathbb{R} باشد. عضو M کوچکترین کران بالای S نامیده می شود. اگر:

$$\forall x \in S \quad M \geq x \quad (1) \quad \text{یک کران بالای } S \text{ باشد، یعنی}$$

$$M \leq \alpha \quad (2) \quad \text{اگر } \alpha \text{ یک کران بالای } M \text{ باشد، آنگاه}$$

با توجه به تعریف کران بالا می توان دید که آنرا با نماد $\sup S$ نمایش می دهیم:

$$M = \sup S$$

بزرگترین کران پایین یا **infimum** (زیرینه)

فرض کنید S یک زیرمجموعه \mathbb{R} باشد، عضو m بزرگترین کران پایین S نامیده می شود. اگر:

$$\forall x \in S \quad x \geq m \quad \text{یک کران پایین } S \text{ باشد. یعنی}$$

$$\beta \leq m \quad \text{اگر } \beta \text{ یک کران پایین } S \text{ باشد، آنگاه } \beta \leq m$$

مثال: اگر $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ باشد، آنگاه $\sup S = 1 \in S$ و $\inf S = 0 \notin S$ است.

سوال: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ باشد، آنگاه نشان دهید $-\sup\{-S\} = \inf S = m$

$$m = \inf S \Rightarrow \begin{cases} \forall \Delta \in S \quad m \leq \Delta \\ \text{if } \beta \leq \Delta \Rightarrow m \geq \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \Delta \in -S \quad -m \geq -\Delta \\ -\beta \geq -\Delta \Rightarrow -m \leq -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall -\Delta \in -S \quad -m \geq -\Delta \\ \text{if } -\beta \geq -\Delta \Rightarrow -m \leq -\beta \end{cases}$$

عبارت فوق تعریف $\sup\{-S\}$ می باشد. یعنی

$$-m = \sup\{-S\} \Rightarrow m = -\sup\{-S\} = \inf S$$

حداکثر و حداقل (**Maximum , Minimum**)

* اگر $\sup S \in S$ باشد، آن را حداکثر S می نامیم و با نماد $\max S$ نشان می دهیم.

* اگر $\inf S \in S$ باشد، آن را حداقل S می نامیم و با نماد $\min S$ نشان می دهیم.

اصل کامل بودن

هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد، دارای Supremum می باشد.

گزاره: هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که از پایین کراندار است، دارای عضو infimum می باشد.

اثبات: تعریف می کنیم $S_1 = \{-\Delta | \forall \Delta \in S\}$. بنابراین S_1 از بالا کراندار است و بنا به خاصیت کامل بودن دارای عضو

$\sup S_1 = \inf S$ می باشد. حال باید ثابت کنیم $\sup S$ قبلًا ثابت شده است.

"گزاره" خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

به ازای هر عدد حقیقی x ، عددی طبیعی مانند n وجود دارد، بطوریکه $n > x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \ni n > x$$

اثبات: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی $x \leq n$. این بدین معنی است که اعداد طبیعی از بالا کراندار می باشند. (

یک کران بالاست) بنابراین بنا به خاصیت کامل بودن، \mathbb{N} دارای $\sup \mathbb{N}$ می باشد. فرض کنید $1 < M = \sup \mathbb{N}$ بنابراین

$M > M - 1$ و از این رو $M - 1$ یک کران بالای \mathbb{N} نیست پس عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد، بطوریکه

$n + 1 > M$. اما بدین معنی است که با $\sup \mathbb{N} < n + 1$ در تناقض است.

نتایج خاصیت ارشمیدسی

نتیجه ۱: $\forall x \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \ni -m < x$

نتیجه ۲: $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{n} < \varepsilon$

اثبات: فرض کنیم $\frac{1}{\varepsilon} = x$ و خاصیت ارشمیدسی را بکار ببرید.

نتیجه ۳: $\forall x \in \mathbb{R} \exists m, n \in \mathbb{N} \ni -m < x < n$

نتیجه ۴: بزرگترین عدد صحیح k که در نامساوی های $-m \leq k \leq n$ و $k \leq x$ صدق می کند، جز صحیح x نامیده می شود و با نماد $[x]$ نمایش داده می شود.

$$[x] \in \mathbb{Z}, [x] \leq x < [x] + 1$$

برای هر عدد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم:

$$* a^n = a \times a \times \cdots \times a$$

$$* a^0 = 1 , a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad a \neq 0$$

خواص مقدماتی زیر، نتایجی هستند که از خاص جبری اعداد حقیقی و تعاریف فوق نتیجه می شوند:

$$1- (a_1 a_2)^n = a_1^n a_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} , \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid a_1, a_2 \neq 0 \quad if \quad a \leq 0$$

$$2- (a^m)^n = a^{mn} \quad a^{m+n} = a^m a^n \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} , a \in \mathbb{R} \quad (a \neq 0 \quad n \leq 0 \quad باشد \quad و \quad m \leq 0 \quad اگر)$$

$$3- if \quad n \in \mathbb{N} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \Rightarrow b_1^n \leq b_2^n$$

فصل دوم: مجموعه اعداد مختلط

معادله $x^2 + 1 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه نمی باشد، یعنی بر روی محور اعداد حقیقی نقطه‌ای را نمی‌توان یافت که در معادله فوق صدق کند. حال فرض کنید $i = \sqrt{-1}$ (هر چند در \mathbb{R} بی معنی است) بنابراین $i^2 = -1$ و معادله فوق دارای جواب $x^2 = i^2$ خواهد بود.

مثال: معادله $x^2 + 7 = 0$ را در نظر بگیرید:

$$x^2 = -7 = i^2 7 \quad x = \pm i \sqrt{7}$$

یک عدد مختلط همواره به صورت یک زوج مرتب $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است. به صورت نمادین $(x, 0)$ به عنوان یک عدد حقیقی و $(0, 1)$ به عنوان یک عدد مختلط در نظر گرفته می‌شود.

یک عدد مختلط به صورت $a + ib$ تعریف می‌شود که در آن a و b دو عدد حقیقی و I را واحد موهومی گویند. (Imaginary unit).

$$\mathbb{C} = \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

سوال: ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 6 = 0$ را بباید؟

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 6}}{1} = -2 \pm \sqrt{-2} = -2 \pm i\sqrt{2}$$

نکته: توجه داشته باشید، اگر در یک عدد مختلط $b = 0$ باشد، عدد حاصل یک عدد حقیقی می‌باشد. بنابراین $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

نکته: اگر $z = a + ib$ باشد، قسمت حقیقی z را با $\operatorname{Re}(z)$ نشان داده و قسمت موهومی آن را با $\operatorname{Im}(z)$ نشان می‌دهند.
 $\operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b$

نکته: این مجموعه داری خاصیت ترتیبی نمی‌باشد، یعنی نمی‌توان اعضای آن را بر حسب بزرگی یا کوچکی مرتب کرد (برخلاف اعداد حقیقی)

عملیات جبری بر روی اعداد

۱- تساوی دو عدد مختلط

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

۲- جمع و تفریق دو عدد مختلط:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ \Rightarrow z_1 \pm z_2 &= a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2) \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \end{aligned}$$

۳- ضرب دو عدد مختلط:

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad i^3 = i \cdot i^2 = -\sqrt{-1} = -i \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1 \quad i^5 = i^2 \cdot i^3 = -1(-i) = i$$

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \xrightarrow[a_1=a_2=a]{b_1=-b_2=b} a^2 + b^2 + i(-ab + ab) = a^2 + b^2 \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \end{aligned}$$

۴- تقسیم دو عدد مختلط:

توجه داشته باشید که در تعریف عمل تقسیم در دستگاه اعداد حقیقی، ابتدا عضو وارون ضربی را برای دو عدد حقیقی تعریف کردیم و سپس عمل تقسیم را بصورت عمل ضرب تعریف نمودیم. حال سوال طبیعی این است که چگونه می‌توان عمل تقسیم در \mathbb{C} را به صورت ضرب تعریف کرد؟

برای انجام این کار، نیاز به تعریف مفهومی به نام مزدوج یک عدد مختلط خواهیم داشت.

مزدوج یک عدد مختلط

اگر $z = a + ib$ یک عدد مختلط باشد، مزدوج آن را به صورت $\bar{z} = a - ib$ تعریف می‌کنیم. با توجه به تعریف مزدوج عدد مختلط تقسیم دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \times \frac{1}{z_2} = (a + bi) \frac{1}{c + di} = (a + bi) \frac{c - di}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}, (z_2 \neq 0) \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \end{aligned}$$

توجه! مقدار $|a+ib| = |z \cdot \bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ را قدر مطلق یا مدول (mod) عدد مختلط z تعریف می کنند و با نماد

نمایش می دهند.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad \bar{z} = a - ib$$

$$z = a + ib \quad \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \\ b = \operatorname{Im}(z) \\ i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \end{cases}$$

نکته: اگر قسمت حقیقی یک عدد مختلط صفر باشد، به آن موهومی محسوس گویند.

سوال: حاصل عبارت $\frac{1+i}{i+2} z$ را به صورت جبری بنویسید؟

$$z = \frac{1+i}{i+2} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

سوال: اگر $z_1 = 3-2i$ و $z_2 = -1+i$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{z_1}{z_2}$ را بدست آورید؟

$$\frac{3-2i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

نکته: در علوم فیزیک و زیر شاخه های آن، از آنجایی که از نماد i برای نمایش شدت جریان استفاده می شود، عدد

موهومی $\sqrt{-1}$ را با j نمایش می دهند. پس $j = \sqrt{-1}$

$$1. z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$3. \exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z$$

$$5. z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$7. z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$9. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad z_2 \neq 0$$

$$11. z^{\frac{1}{n}} = [re^{i(2k\pi+\theta)}]^n = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(2k\pi+\theta)}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$13. \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$15. |z^n| = |z|^n$$

$$17. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \text{یا} \quad \overline{\prod_{i=1}^m z_i} = \prod_{i=1}^m \overline{z_i}$$

$$19. \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$2. z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$4. \forall z \in \mathbb{C}, \exists -z \in \mathbb{C}, z + (-z) = 0$$

$$6. \exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, 1z = z, (1 = (1, 0))$$

$$8. |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{یا} \quad \left| \prod_{i=1}^m z_i \right| = \prod_{i=1}^m |z_i|$$

$$10. z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$12. |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$14. \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$16. \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$18. \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

تعریف اعداد مختلط به صورت زوج مرتب

از نقطه نظر منطقی تعریف عدد مختلط به صورت یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی x و y معادل تعریف عدد مختلط است، اگر شرایط زیر برای (x, y) برقرار باشند.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$m(x, y) = (mx, my)$$

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\text{if } z = x + iy$$

$$\Rightarrow 1 \equiv (1, 0) \quad i \equiv (0, 1)$$

$$\text{and } (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

سوال: اعداد زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید؟

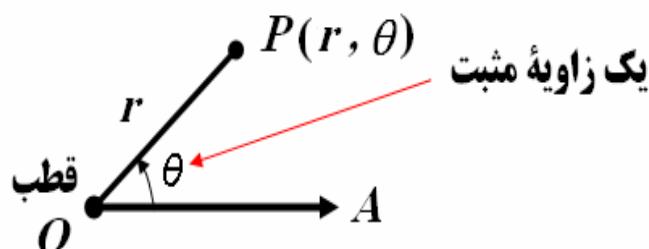
$$-2 = -2(1, 0)$$

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = -1(1, 0) = -1$$

$$i^3 = (0, 1)(0, 1)(0, 1) = -1(0, 1) = -i$$

تعابیر هندسی اعداد مختلط و نمایش قطبی آن

از آن جایی که هر عدد مختلط را می‌توان به صورت یک زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد، می‌توان صورت قطبی این زوج مرتب را به عنوان صورت قطبی عدد مختلط در نظر گرفت.



می‌توان یک زوج مرتب را به صورت قطبی به شکل $y = r \sin \theta$ و $x = r \cos \theta$ نشان داد که در آن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

حال می‌توان شکل قطبی عدد مختلط را به صورت زیر نوشت:

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r cis \theta$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان گفت:

نکته: به r طول یا مدول عدد مختلط و به θ آرگمان گویند.

توجه! اگر آرگمان یک عدد به صورت \arg نوشته شود، منظور تمام آرگمان‌های عدد مختلط است ولی اگر به صورت

Arg نوشته شود، فقط آرگمان اصلی مد نظر است.

نکته: هر عدد مختلط دارای یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی و یک طول است ولی تعداد بی شماری \arg دارد.

برای مثال میتوان معادله دایره را به صورت قطبی بیان کرد:

$$A = x^2 + y^2 = 1 \rightarrow A = \{r^2 = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

رابطه اویلر $\begin{cases} \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \\ \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} = e^{-i(\theta+2k\pi)} \end{cases}$

سوال: $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ در حالت کلی

توجه! if $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow z = r \cos \theta + ir \sin \theta \rightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z = re^{i\theta}$

سوال: صورت قطبی $z = 1 - i$ را بنویسید؟

$$x = 1, y = -1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

صورت قطبی: $z = \sqrt{2} cis \frac{7\pi}{4}$

سوال: اگر z یک عدد مختلط باشد، طول و آرگمن e^{z+i} چقدر است؟

$$e^{x+iy-i} = e^{x+i(y+1)} = e^x e^{i(y+1)} \equiv re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y + 1 \end{cases}$$

قضیه دموآور

اگر $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$ باشد، آنگاه $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 cis \theta_2$ و $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 cis \theta_1$

اثبات:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1))] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

نکته: در ضرب دو عدد مختلط در صورت قطبی، کافی است r ها را در هم ضرب و θ ها را با هم جمع کنیم.

نکته: در تقسیم دو عدد مختلط در صورت قطبی، کافی است r ها بر هم تقسیم و θ ها را از هم کم کنیم.

$$z_1 z_2 = z^2 = (rcis \theta)^2 = r^2 cis 2\theta \quad \text{آنگاه } z_1 = z_2 = z$$

صورت کلی قضیه دموآور

اگر z_1, z_2, \dots, z_n اعداد مختلط باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n cis(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

حال اگر $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ باشد، آنگاه

$$z_1 z_2 \dots z_n = (rcis \theta)^n = r^n cis(n\theta)$$

$$z = x + iy = rcis \theta \quad \bar{z} = x - iy = rcis(-\theta)$$

سوال: حاصل عبارت $(1+i)^{12}(2+2\sqrt{3}i)$ را بدست آورید؟

$$z_1 = (1+i) = \sqrt{2} cis \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1^{12} = (\sqrt{2} cis \frac{\pi}{4})^{12} = 64 cis 3\pi = -64$$

$$z_2 = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow z_2 = 4 cis \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 z_2 = (64 cis 3\pi)(4 cis \frac{\pi}{3}) = 256 cis \frac{4\pi}{3}$$

سوال: در رابطه $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ مقدار x و y را بیابید؟

$$3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y \equiv 7 \\ 2y - x \equiv 5 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 2$$

سوال: نسبت های مثلثاتی $\sin 3\theta$ را بر حسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ بدست آورید؟

$$\begin{aligned} z = rcis \theta &\Rightarrow z^3 = r^3(cis \theta)^3 = r^3(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \\ &= \cos^3 \theta + 3\cos^2 \theta i \sin \theta + 3\cos \theta i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + i 3\sin \theta \cos^2 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta &= \cos 3\theta \\ 3\sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta &= \sin 3\theta \end{aligned}$$

توجه! آنگاه $\bar{z} = x - iy = rcis(-\theta)$ و $z = x + iy = rcis \theta$

$$z \bar{z} = r^2 cis(\theta - \theta) = r^2 = x^2 + y^2$$

سوال: عبارت $\frac{1+i}{1-i}$ را به صورت قطبی بنویسید؟

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = i$$

$$\text{روش دیگر: } \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{2} = i$$

ریشه های اعداد مختلط

اگر $z = rcis \theta$ آنگاه $z^n = r^n cis(n\theta)$ می باشد. با استفاده از این رابطه می توان ریشه یک عدد مختلط را به صورت

$$z^{\frac{1}{n}} = u = \varphi cis \phi \Rightarrow z = u^n = \varphi^n cis n\phi$$

$$\varphi^n = r \Rightarrow \varphi = \sqrt[n]{r}$$

$$\cos n\phi = \cos \theta$$

$$\Rightarrow n\phi = 2k\pi + \theta \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi + \theta}{n} \quad (k=0,1,\dots,n-1)$$

$$\sin n\phi = \sin \theta$$

پس به طور کلی می توان گفت:

$$k=0 \Rightarrow u_1 = \sqrt[n]{r} cis \frac{\theta}{n}$$

$$k=1 \Rightarrow u_2 = \sqrt[n]{r} cis \frac{2\pi + \theta}{n}$$

$$k=2 \Rightarrow u_3 = \sqrt[n]{r} cis \frac{4\pi + \theta}{n}$$

⋮

$$k=n-1 \Rightarrow u_n = \sqrt[n]{r} cis \frac{2(n-1)\pi + \theta}{n}$$

$$\text{if } k=n \Rightarrow u = \sqrt[n]{r} cis \frac{2n\pi + \theta}{n} = \sqrt[n]{r} cis(2\pi + \frac{\theta}{n}) = \sqrt[n]{r} cis \frac{\theta}{n} = u_1$$

سوال: ریشه پنجم $2+2i$ را بدست آورید؟

$$z = \sqrt[5]{2+2i} \rightarrow r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad \tan \theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi = \sqrt[5]{2\sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{8}} = \sqrt[10]{8}$$

$$u_{k+1} = \sqrt[10]{8} cis \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4} \quad k=0,1,2,3,4$$

این پنج ریشه بر روی صفحه \mathbb{R}^2 ، رئوس یک پنج ضلعی منتظم محاط در دایره ای به شعاع $\sqrt[10]{8}$ می باشد.

سوال: معادلات زیر را حل کنید؟

(الف) $t^3 - 1 = 0$

$$t = \sqrt[3]{1} \quad x = 1, y = 0, r = 1$$

$$\theta = 0 \quad \varphi = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$u_{k+1} = cis \frac{2k\pi}{3} \quad (k=0,1,2)$$

(ب) $t^2 - 1 = 0$

$$t = \sqrt{1} \quad x = 1, y = 0, r = 1$$

$$\theta = 0 \quad \varphi = \sqrt{1} = 1$$

$$u_{k+1} = cis(k\pi) \quad (k=0,1)$$

$$\text{ج) } z = \sqrt[6]{i}$$

$$x = 0, y = 1, r = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$u_{k+1} = cis \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{6} \quad (k=0,1,2,3,4,5)$$

$$\text{د) } z = \sqrt[3]{1-i} \sqrt{1+i}$$

$$\sqrt[6]{(1-i)^2(1+i)^3} = \sqrt[6]{(-2i)(2-2i)} = \sqrt[6]{4+4i}$$

$$x = 4, y = 4, r = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \varphi = \sqrt[12]{32}$$

$$u_{k+1} = \sqrt[12]{32} cis \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{6} \quad (k=0,1,2,3,4,5)$$

سوال: مکان هندسی $|z+4| = |z-2|$ چه شکلی است؟

$$\begin{aligned} |x+iy+4| &= |x+iy-2| \Rightarrow \sqrt{(x+4)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow (x+4)^2+y^2 = (x-2)^2+y^2 \\ &\Rightarrow 12x = -12 \Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

مکان هندسی مورد نظر خط $x = -1$ می باشد.

تمرینات فصل دوم

تمرین: درستی هریک از موارد زیر را نشان دهید؟

1. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$

2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$

3. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad z_2 \neq 0$

4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5. $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

6. $-|z_1 \cdot \bar{z}_2| \leq \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq |z_1 \cdot \bar{z}_2|$

تمرین: نشان دهید n ریشه n ام واحد، رئوس یک n -ضلعی منتظم را تشکیل می دهند.

تمرین: اگر z_0 ریشه ای از معادله $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ آن نیز ریشه این چند جمله ای است. ($a_i \in \mathbb{R}$)

تمرین: اگر w یکی از ریشه های n ام واحد باشد، آنگاه $\frac{n}{w-1}$ است.

تمرین: نشان دهید، معادله $|z+3| + |z-3| = 10$ ، معادله یک بیضی است.

تمرین: هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

1. $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

2. $|z^n| = |z|^n$

3. $\bar{\bar{z}} = z$

4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$$6. \sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

تمرین: اگر $\operatorname{Arg}(z + \bar{z}) = 0$ ، آنگاه $\operatorname{Re}(z) > 0$

تمرین: ریشه چهارم $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ را حساب کنید؟

تمرین: ریشه معادلات زیر را بدست آورید؟

$$1. z^4 - 4z^2 + 16 = 0$$

$$2. z^6 + z^4 + z^2 + 1 = z^5 + z^3 + z$$

$$3. z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 6z + 3 = 0$$

تمرین: اگر w ریشه سوم واحد باشد و $w \neq 0$ نشان دهید:

$$1. 1+w+w^2=0$$

$$2. (1+w^2)^4=w$$

$$3. (1-w+w^2)(1+w-w^2)=4$$

تمرین: ثابت کنید.

$$\left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}\right)^n = \frac{1+i \tan n\alpha}{1-i \tan n\alpha}$$

تمرین: مکان هندسی \mathbb{Z} را بیابید؟

$$1. \{z \in \mathbb{C} : |z - i + 1| + |z + i - 1| = 3\}$$

$$2. \{z \in \mathbb{C} : 4 \leq |z - i + 1| + |z + i - 1| \leq 6\}$$

تمرین: ثابت کنید $\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$

فصل سوم: تابع

زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی است. ($F \subseteq A \times B$)

$$y = f(x) \rightarrow (x, y) \in f, (y, x) \in f^{-1}$$

$$D_f = R_{f^{-1}} \subseteq A$$

$$R_f = D_{f^{-1}} \subseteq B$$

شرط یک به یک بودن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\begin{array}{l} f : A \rightarrow B \\ R_f = B \end{array}$$

سوال: بررسی کنید کدام یک از توابع زیر پوشاند و یک به یک هستند؟

$$\begin{array}{l} 1) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(x) = x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \quad f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ f(x) = x^2 \end{array}$$

پوشاند ولی یک به یک
و یک به یک نیست.

پوشاند ولی یک به یک
نیست

پوشاند ولی یک به یک
است.

پوشاند ولی یک به یک
و یک به یک هست.

$$\begin{array}{l} \text{تابع زوج} \\ : \quad x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{تابع فرد} \\ : \quad x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{array}$$

تابع ترکیب توابع: $(fog)(x) = f(g(x)) : D_f = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

تابع معکوس ترکیب توابع: $h(x) = (fog)(x) \rightarrow h^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$

سوال: اگر $f(\arcsin(\frac{x-1}{x+1})) = x+2$ باشد، مقدار $f(x)$ را بیابید؟

$$\arcsin(\frac{x-1}{x+1}) = t \Rightarrow x(1-\sin t) = 1+\sin t \Rightarrow x = \frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

$$f(t) = \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + 2 \Rightarrow f(t) = \frac{3-\sin t}{1-\sin t} \Rightarrow f(x) = \frac{3-\sin x}{1-\sin x}$$

سوال: برد تابع $y = -2[x] + 2x + 1$ را بیابید؟

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq 2x - [2x] < 2 \Rightarrow 1 \leq 2x - [2x] + 1 < 3 \rightarrow 1 \leq y < 3$$

$$\Rightarrow R_f = [1, 3)$$

سوال: معکوس تابع $y = \ln(\frac{x+1}{x-1})$ را بیابید؟

$$e^y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)e^y = (x+1) \Rightarrow (e^y - 1)x = e^y + 1 \Rightarrow x = \frac{e^y + 1}{e^y - 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

سوال: نمودار معکوس تابع $y = \ln(x) + x$ ، نیمساز ناحیه اول را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A تا (3, 5) را بیابید؟

$$\begin{cases} y = \ln x + x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \ln x + x = x \Rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1, y = 1$$

$$A(1, 1) \quad A'(3, 5)$$

$$|AA'| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20}$$

تمرینات فصل سوم:

تمرین: وارون هر یک از توابع زیر را پیدا کنید؟

$$1. f(x) = \frac{x-2}{x+2}$$

$$2. f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$3. f(x) = x + [x]$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \leq 0 \\ x^2 + 3 & x > 0 \end{cases}$$

تمرین: اگر f و g هردو تابع فرد باشند، زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید؟

$$1. f \pm g$$

$$2. f \cdot g$$

$$3. \frac{f}{g}, g \neq 0$$

$$4. fog$$

$$5. gof$$

$$6. fogof$$

$$7. gofog$$

تمرین: نشان دهید که وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ برابر $f^{-1}(x) = (\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2})^2$ است.

تمرین: تابع بودن یا نبودن توابع زیر را بررسی کنید؟

$$1. y^3 + y = x$$

$$2. y^3 - y = x$$

فصل چهارم: دنباله

هر تابع مانند $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ یک دنباله نامتناهی نامیده می شود. جملات این دنباله را با $\{a_n\}$ نمایش می دهیم و a_n را جمله عمومی یا جمله n ام دنباله می نامیم.

$$f(n) = a_n$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

همگرایی دنباله ها: آن دسته از دنباله هایی که با افزایش n ، جملات دنباله به یک عدد نزدیک و نزدیک تر می شوند (حد وجود داشته) می گوییم آن دنباله همگرا یا متناوب است. در غیر این صورت دنباله واگراست.

تعریف همگرایی دنباله: دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به عدد L می گوییم و با نماد $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ نمایش می دهیم، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

سوال: ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ به صفر میل می کند؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists n \geq M \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow M = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right] + 1$$

سوال: اگر $a_n = (-1)^n$ باشد، آیا این دنباله همگراست؟

فرض کنیم این دنباله همگرا باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists n \geq M \Rightarrow |(-1)^n - L| < \varepsilon$$

$$if \quad \varepsilon = 1 \Rightarrow |(-1)^n - L| < 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 2k : \quad |1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - L < 1 \Rightarrow 2 > L > 0 \\ n = 2k - 1 : \quad |-1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < -1 - L < 1 \Rightarrow 0 > L > -2 \end{cases}$$

که این یک تناقض است.

سوال: ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$M = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

قضیه: هر دنباله همگرا حد منحصر به فرد دارد.

اثبات. فرض کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1 : \forall \varepsilon > 0 \exists M_1 \in \mathbb{N} \ni n \geq M_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2 : \forall \varepsilon > 0 \exists M_2 \in \mathbb{N} \ni n \geq M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

حال اگر $M = \max(M_1, M_2)$ باشد و اگر $n \geq M$ آنگاه هر دو رابطه بالا برقرار است. پس:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

در نتیجه:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \ni 0 \leq |L_1 - L_2| < \varepsilon \Rightarrow L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

سوال: ثابت کنید دنباله $\{n^2 - 4n\}$ واگرای است.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \ni n \geq M \Rightarrow |n^2 - 4n - L| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow |n^2 - 4n - L| < 1 \Rightarrow -1 < n^2 - 4n - L < 1 \Rightarrow L - 3 < (n - 2)^2 < L + 5 \Rightarrow n < \sqrt{L + 5} + 2$$

رابطه فوق یک تناقض است، زیرا نشان می دهد که اعداد طبیعی از بالا کراندار است.

سوال: ثابت کنید که عدد $L = 0$ حد دنباله $\left\{ \frac{n^2 - 2}{2n^2 - 9} \right\}$ نیست.

اگر $L = 0$ حداین دنباله باشد، آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \ni n \geq M \Rightarrow \left| \frac{n^2 - 2}{2n^2 - 9} \right| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, n \geq 3 \Rightarrow \left| \frac{n^2 - 2}{2n^2 - 9} \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow n^2 - 1 < \frac{2n^2 - 9}{9} \Rightarrow 2n^2 - 4 < 2n^2 - 9 \Rightarrow -4 < -9$$

که یک تناقض است.

سوال: با استفاده از تعریف حد دنباله ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = 0$$

$$\left| \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \right| < \varepsilon \longrightarrow \left| \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \right| < \left| \frac{2 + 1}{2^n} \right| = \frac{3}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow n > \log_2^{3\varepsilon^{-1}} \Rightarrow M = \lceil \log_2^{3\varepsilon^{-1}} \rceil + 1$$

بنابراین:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad n \geq M \Rightarrow \left| \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \right| < \frac{3}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \right| < \varepsilon$$

سوال: نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ (یعنی رشد $n!$ از a^n بیشتر است.)

$$n > k \Rightarrow \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{n} = \left(\frac{a}{1} \frac{a}{2} \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{k} \right) \left(\frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} \right)$$

$$\text{حال فرض کنید } k > 2a \Rightarrow a < \frac{k}{2}, \quad \frac{a}{k+1} < \frac{k}{2(k+1)} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{l} < \frac{1}{2} \Rightarrow l \geq k+1$$

$$\frac{a^n}{n!} < a^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = (2a)^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{می دانیم: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{(2a)^k}$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{(2a)^k} \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

اعمال روی دنباله ها

اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند، دنباله های $\{a_n b_n\}$ ، $\{a_n \pm b_n\}$ و $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ را می توان دنباله جدید تعریف کرد.

قضیه: اگر $b^n \rightarrow L_2$ و $a^n \rightarrow L_1$ همگرا باشند، آنگاه

$$1) a_n \pm b_n \rightarrow L_1 \pm L_2 \quad 2) a_n b_n \rightarrow L_1 L_2 \quad 3) \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L_1}{L_2} \quad (b_n \neq 0, L_2 \neq 0)$$

اثبات ۱:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 + L_2$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1 : \forall \varepsilon > 0 \exists M_1 \in \mathbb{N} \exists n \geq M_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2 : \forall \varepsilon > 0 \exists M_2 \in \mathbb{N} \exists n \geq M_2 \Rightarrow |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

حال اگر M باشد و $n \geq M$ باشد، آنگاه داریم:

$$|a_n + b_n - (L_1 + L_2)| = |a_n - L_1 + b_n - L_2| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$$

مثال: دنباله $\left\{ \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{n+1}{n} \right\}$ همگراست، زیرا مجموع دو دنباله همگراست.

نتیجه: اگر $\{a_n\}$ همگرا و $\{b_n\}$ واگرا باشد، دنباله های $\{a_n \pm b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ واگرا خواهند بود.

اثبات:

اما طبق فرض b_n واگراست. if $c_n = a_n + b_n$ converges $\Rightarrow c_n - a_n$ also converges $c_n - a_n = b_n$

اما طبق فرض b_n واگراست. if $c_n = a_n b_n$ converges $\Rightarrow \frac{c_n}{a_n} = b_n$ also converges

طبق فوق واگراست، اما طبق فرض a_n همگراست. if $c_n = \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ converges $\Rightarrow c_n \times b_n = a_n$

نکته: اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا باشند، در مورد جمع و تفریق، ضرب و تقسیم آن ها حکم کلی وجود ندارد و حاصل همواره می تواند همگرا یا واگرا باشد.

قضیه: بازی هر عدد حقیقی r دنباله ای از اعداد گویا وجود دارد که همگرا به r است.

$$\exists x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

اثبات.

$$r - \frac{1}{n} < x_n < r$$

طبق قضیه فشردگی خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

توجه! می توان با استفاده از کسر های مسلسل تقریب برخی اعداد را بدست آورد، مانند $\sqrt{5}$:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = A$$

$$1 + \frac{1}{A} = A \Rightarrow A^2 = 1 + A \Rightarrow A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = 2A - 1$$

کرانداری و یکنواختی

دنباله $\{a_n\}$ کراندار از بالا نامیده می شود، اگر $\exists U \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq U$ باشد.

همچنین این دنباله کراندار از پایین نامیده می شود، اگر $\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq L$ باشد.

دنباله را کراندار گوییم هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد.

$$L \leq a_n \leq U \quad K = \max(|L|, |U|) \Rightarrow |a_n| \leq K$$

نکته:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow n+1 > n \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} > a_n & , \text{ صعودی} \\ a_{n+1} < a_n & , \text{ نزولی} \end{cases}$$

غیرنزولی(جملات صعودی یا ثابت)
غیرصعودی(جملات نزولی یا ثابت)

نکته:

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} - a_n > 0 & \text{یا} & \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \\ & & \text{دنباله صعودی} \\ a_{n+1} - a_n < 0 & \text{یا} & \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ & & \text{دنباله نزولی} \end{array}$$

توجه! بزرگترین کران پایین را $\inf a_n$ و کوچکترین کران بالا را $\sup a_n$ گویند.

قضیه: هر دنباله همگرا کراندار است.

اثبات: فرض کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ باشد، آنگاه

$$\exists K > 0 \quad \exists |a_n| \leq K$$

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \quad \forall n \geq M$$

$$K = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{M-1}|, \varepsilon + |L|\} \Rightarrow |a_n| \leq K$$

نتیجه: هر دنباله همگرا کراندار است و دنباله ای که کراندار نباشد، واگرای است.

مثال: دنباله $a_n = (-1)^n$ کراندار است ولی همگرا نیست پس عکس قضیه برقرار نمی باشد.

سوال: آیا دنباله $\left\{ n \sin \frac{\pi}{n} \right\}$ کراندار است؟ چون دنباله همگر است پس کراندار نیز است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{n}{n}} = \pi$$

قضیه: هر دنباله یکنوا و کراندار همگر است.

سوال: ثابت کنید که دنباله $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$ همگر است؟

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)^2}{n^22^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} < 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{9}{8}, a_4 = 1, a_5 = \frac{25}{32}, \dots \Rightarrow 0 < a_n < \frac{9}{8}$$

چون این دنباله یکنوا و کراندار است پس همگر است.

آزمون مقایسه

اگر $0 \leq a_n < b_n$ باشد، آنگاه داریم:

الف) اگر b_n همگرا باشد، آنگاه a_n نیز همگراست.

ب) اگر a_n واگرا باشد، b_n نیز واگراست.

عمل ضرب

اگر $a_n \rightarrow L_1$ و $b_n \rightarrow L_2$ باشد، آنگاه $|a_n| \leq k$ می شود. حال اگر $a_n b_n \rightarrow L$ (کراندار) و $0 \rightarrow L$ باشد، آنگاه

$$a_n b_n \rightarrow 0$$

قضیه فشردگی در دنباله ها

اگر $a_n \rightarrow L$ و $c_n < a_n < b_n \rightarrow L$ باشد، آنگاه $c_n \rightarrow L$ خواهد بود.

اثبات.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L : \forall \varepsilon > 0 \exists M_1 \in \mathbb{N} \exists n \geq M_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L : \forall \varepsilon > 0 \exists M_2 \in \mathbb{N} \exists n \geq M_2 \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$$

حال اگر $M = \max(M_1, M_2)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$L - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon \Rightarrow c_n \rightarrow L$$

سوال: نشان دهید $a_n = \frac{n^2}{\sin n}$ واگر است؟

برهان خلف: فرض کنیم این دنباله همگرا باشد، آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_1 \in \mathbb{N} \exists n \geq M_1 \Rightarrow \left| \frac{n^2}{\sin n} - L \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{n^2}{\sin n} - L < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \sin n \geq 0 \Rightarrow n^2 < \varepsilon \sin n + L \sin n \Rightarrow n < \sqrt{\varepsilon \sin n + L \sin n} \\ \sin n < 0 \Rightarrow n^2 > \varepsilon \sin n + L \sin n \Rightarrow n > \sqrt{\varepsilon \sin n + L \sin n} \end{cases}$$

که این یک تناقض است، پس فرض غلط و حکم ثابت است.

تمرینات فصل چهارم:

تمرین: اگر دنباله $b_n \rightarrow b^*$ باشد، ثابت کنید: $a_n \rightarrow a^*$

$$1. c_n = a_n b_n \rightarrow \{c_n\} \rightarrow a^* b^*$$

$$2. c_n = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \{c_n\} \rightarrow \frac{a^*}{b^*}$$

تمرین: همگرایی، یکنواختی و کرانداری هر یک از دنباله های زیر را بررسی کنید؟

$$1. a_n = \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\}$$

$$2. a_n = \left\{ \cos \frac{\pi}{n+2} \right\}$$

$$3. a_n = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \cos \frac{\pi}{n+2} \right\}$$

تمرین: همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید؟

$$1. \left\{ \frac{n}{n+1} \cos n\pi \right\}$$

$$2. \left\{ \frac{1}{n} \cos n\pi \right\}$$

$$3. \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \right\}$$

$$4. \left\{ \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n} \right\}$$

$$5. \left\{ \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} \right\}$$

$$6. \left\{ \frac{[x] + [x^2] + \dots + [x^n]}{x^n} \right\}$$

$$7. \left\{ n \left[\frac{1}{n} \right] \right\}$$

$$8. \left\{ \frac{[kn]}{n} \right\}$$

فصل پنجم: حد و پیوستگی

فرض کنید $y = f(x)$ تابعی باشد که برای تمام مقادیر نزدیک x_0 مُگر خود $x = x_0$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت x_0 نزدیک می‌شود، برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} 3x - 4 = -1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 4 + 1| < \varepsilon$$

$$|3x - 4 + 1| < \varepsilon \Rightarrow |3x - 3| < \varepsilon \Rightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \xrightarrow{|x-1|<\delta} \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

برای اینکه استلزم منطقی فوق همیشه صحیح باشد، باید: $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$

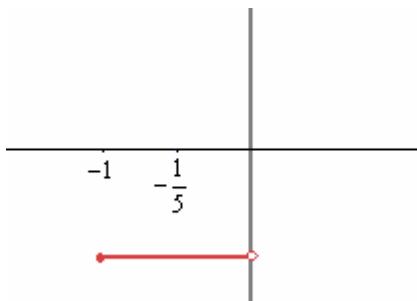
$$2. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} [x] = -1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists 0 < \left| x + \frac{1}{5} \right| < \delta \Rightarrow |[x] + 1| < \varepsilon$$

در واقع هدف پیدا کردن یک همسایگی محذوف از نقطه $x = -\frac{1}{5}$ می‌باشد که در این همسایگی برای هر ε دلخواه

با توجه به نمودار تابع در اطراف $x = -\frac{1}{5}$ داریم: $|[x] + 1| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \delta < +\frac{1}{5} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| < \delta < \frac{1}{5} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5} < x < 0 \\ \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow |[x] + 1| = 0 < \varepsilon \end{aligned}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta < \frac{1}{5} \exists 0 < \left| x + \frac{1}{5} \right| < \delta \Rightarrow |[x] + 1| < \varepsilon$$

حد چپ و حد راست

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L^+ \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L^- \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon$$

$$\text{if } L^+ = L^- \Rightarrow f(x) \rightarrow L$$

سوال: اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 3-x & x < 1 \end{cases}$ باشد، آنگاه ثابت کنید

$$0 < x - 1 < \delta_1 \Rightarrow |x + 1 - 2| < \varepsilon \Rightarrow \delta_1 \leq \varepsilon$$

$$0 < 1 - x < \delta_2 \Rightarrow |1 - x| < \varepsilon \Rightarrow \delta_2 \leq \varepsilon$$

$$\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \exists 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon \quad \text{همواره برقرار است.}$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$1- \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists 0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

باید بازه ای برای x تعیین کرد که داشته باشیم:

$$0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow |x + 2| < \frac{\varepsilon}{|x - 2|}$$

اگر مقدار A را طوری در این بازه پیدا کنیم که داشته باشیم $|x + 2| < A < \frac{\varepsilon}{|x - 2|}$ آنگاه خواهیم داشت

یعنی باید یک کران پایین برای $|x + 2| < \frac{\varepsilon}{|x - 2|}$ تعیین کنیم که در واقع معادل با حداقل $|x - 2|$ باشد.

$$\text{if } \delta_1 = 1 \Rightarrow |x + 2| < 1 \Rightarrow 3 < |x - 2| < 5 \Rightarrow \max(|x - 2|) + 5$$

$$\delta \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\} \quad \text{پس :}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists |x + 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x + 2|}$$

در واقع

$$\begin{cases} 0 < |x + 2| < 1 \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \\ 0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x + 2|} \end{cases}$$

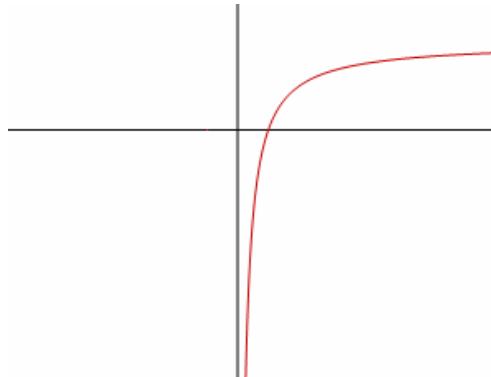
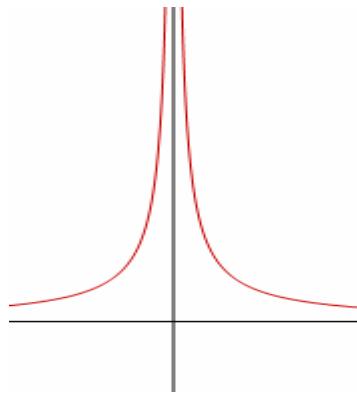
2- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 7$

$$\left| \frac{x^2 - 2}{x - 2} - 7 \right| = |x - 3| \frac{|x - 4|}{|x - 2|} < \varepsilon$$

$$|x - 3| < A < \frac{\varepsilon|x - 2|}{|x - 4|} \quad A = \min \frac{\varepsilon|x - 2|}{|x - 4|}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow |x - 3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0.5 < |x - 2| < 1.5 \\ 0.5 < |x - 4| < 1.5 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{0.5}{1.5} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

حد بی نهایت



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \equiv \forall N > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \equiv \forall N > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

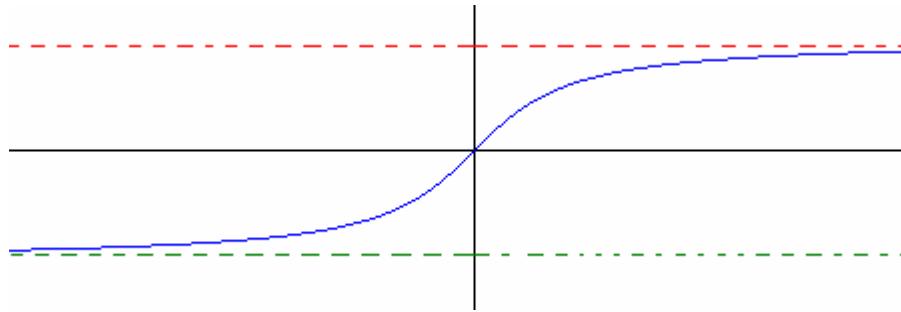
$$\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{5-x}{x+3} \right| = +\infty$$

$$\forall N > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists \quad 0 < |x+3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5-x}{x+3} \right| > N$$

$$\left| \frac{5-x}{x+3} \right| > N \Rightarrow |x+3| \frac{1}{|x-5|} < \frac{1}{N} \Rightarrow |x+3| < A < \frac{|x-5|}{N} \quad A = \min \frac{|x-5|}{N}$$

if $\delta = 1 \Rightarrow -4 < x < -2 \Rightarrow -4-5 < x-5 < -2-5$
 $\Rightarrow -9 < x-5 < -7 \Rightarrow 7 < |x-5| < 9$

حد در بی نهایت



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \equiv \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \exists x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \equiv \quad \forall N > 0 \quad \exists M > 0 \quad \exists x < -M \Rightarrow f(x) > N$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \exists \quad x < -M \Rightarrow \left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| = \left| \frac{x-x+1}{x-1} \right| = \left| \frac{1}{x-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 1-x > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x < 1 - \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow -M < 1 - \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

قضیه هاین (حد توابع و دنباله ها)

فرض کنید $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in D_f$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ به a همگرا باشد، بطوریکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و دنباله حقیقی $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگرا خواهد بود.

: اثبات :

فرض $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad * \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ \exists n \geq M \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad ** \end{array} \right.$

حکم $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ \exists n \geq M \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon$

$\xrightarrow{**} \varepsilon = \delta \Rightarrow \exists n \geq M \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - a| < \varepsilon$ حکم برقرار است.

توجه کنید که چون $a_n \neq a$ پس $\forall n : a_n \neq a$

قضیه فوق ابزاری برای اثبات عدم وجود حد می باشد.

نتیجه: برای اثبات عدم وجود حد یک تابع در نقطه a ، دو دنباله مانند a_n و b_n پیدا کنید، بطوریکه

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n \neq a & a_n \in D_f \\ b_n \neq a & b_n \in D_f \end{cases}$$

و هر دو به a همگرا باشند. حال نشان دهید که دنباله های جدید $\{f(b_n)\}$ و $\{f(a_n)\}$ به دو عدد متفاوت همگرا باشند.

سوال: ثابت کنید تابع $f(x)$ در هیچ نقطه ای حد ندارد.

فرض کنید، بخواهیم حد این تابع را در نقطه $x = a$ بررسی کنیم. طبق قضایای فصل دنباله ها داریم:

$\exists x_n \in \mathbb{Q} : x_n \rightarrow x_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_n) \rightarrow 1 \\ f(x'_n) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0$$

$\exists x'_n \notin \mathbb{Q} : x'_n \rightarrow x_0$

بنابراین $f(x)$ در هیچ نقطه حد ندارد.

سوال: اگر $f(x) = \begin{cases} a_1 & x \in \mathbb{Q} \\ a_2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، تابع $g(x) = (x^2 - 2)f(x)$ در چند نقطه حد دارد؟

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \pm\sqrt{2}$$

سوال: نشان دهید تابع $f(x) = x[x]$ در نقطه $x=1$ حد ندارد.

$$\{a_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\} \rightarrow 1 \quad \{b_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} \rightarrow 1 \quad a_n, b_n \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{1}{n}\right] = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times 1 \quad \lim f(a_n) = 1 \\ 1 \neq 0 \quad \text{حد ندارد.}$$

$$f(b_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[1 - \frac{1}{n}\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times 0 \quad \lim f(b_n) = 0$$

سوال: ثابت کنید $f(x) = \sin(\frac{1}{2x})$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

$$a_n = \frac{1}{4\pi n} \rightarrow 0 \quad f(a_n) = \sin 4\pi n \rightarrow 0 \\ \text{حد ندارد.}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi + 4\pi n} \rightarrow 0 \quad f(b_n) = \cos 4\pi n \rightarrow 1$$

سوال: نشان دهید $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \rightarrow 0 \quad \{f(a_n)\} = \{f(a_n)\} = \{(-1)^n\} \quad \text{واگرای است} \\ \text{پس } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ وجود ندارد.}$$

سوال: ثابت کنید $y = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است و در تمام نقاط بجز $x=1$ ناپیوسته است.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \neq 1, \quad \{a_n\} \rightarrow 1 \quad f(a_n) = \begin{cases} 2a_n & a_n \in \mathbb{Q} \\ a_n + 1 & a_n \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f(a_n) \rightarrow 2 \\ \text{تابع در } x=1 \text{ پیوسته است.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1) \Rightarrow \text{بنا به قضیه هاین}$$

حال $a \neq 1$

$$\{a_n\} = \left\{a + \frac{1}{n}\right\} \rightarrow a \quad f(a_n) = 2a + \frac{2}{n} \rightarrow 2a \\ 2a \neq a+1 \text{ as } a \neq 1$$

$$\{b_n\} = \left\{a + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\} \rightarrow a \quad f(b_n) = a + \frac{\sqrt{2}}{n} + 1 \rightarrow a+1 \\ \text{بنابراین } f \text{ در } a \text{ پیوسته نیست.}$$

اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به a ($\forall n : x_n \neq a$) داشته باشیم، که $\{f(x_n)\}$ به L همگراست. آنگاه

سوال: ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{a_n\} \rightarrow -2 \Rightarrow \{f(a_n)\} = \{a_n^2\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 = (-2)^2 = 4$$

تعریفی برای تابع پیوسته

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ 2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \exists |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ 3. \text{if } \{a_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{f(a_n)\} \rightarrow f(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) \\ 4. \text{if } x, y \in \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq |x - a| \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x + a) = f^+(a) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x + a) = f^-(a) \end{cases} \end{array} \right.$$

توجه! تعاریف بیان شده معادل هم هستند.

نکته: تابع f را در فاصله $[a, b]$ پیوسته گویند، اگر

۱- به ازای تمام نقاط $x \in (a, b)$ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ پیوسته باشد.

۲- به ازای $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

۳- به ازای $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

سوال: اگر تابع f در بازه $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\forall x \in [a, b] \rightarrow f(x) = 0$ آنگاه

$\forall t \notin \mathbb{Q} \exists t \in [a, b] \Rightarrow f(t) = 0$

هدف: تابع پیوسته باید هم برای اعداد گویا و هم برای اعداد اصم صفر شود.

$\exists x_n \in \mathbb{Q} \quad \exists x_n \rightarrow t$

$$f(t) = f(\lim_{x \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) \xrightarrow{f(x)=0} 0$$

سوال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع پیوسته باشد؟

$$g(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n} \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right) = n - [n] = 0 \longrightarrow a_n \rightarrow 0, \quad g(a_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow g(a_n) \neq g(b_n)$$

$$\{b_n\} = \frac{1}{n + \frac{1}{8}} \Rightarrow g(b_n) = n + \frac{1}{8} - n = \frac{1}{8} \longrightarrow b_n \rightarrow 0, \quad g(b_n) \rightarrow \frac{1}{8}$$

پس $\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$ در هیچ نقطه حد ندارد، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

سوال: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در $x=3$ پیوسته باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi}{4}x & x < 3 \\ 2b & x = 3 \\ \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}x + 3a & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\cot \frac{\pi}{4}x \right] = -1$$

$$\Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 2b$$

$$-1 < \cos \frac{\pi}{4}x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}x < -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} [\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}x] = -2$$

$$-2 + 3a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

نکته: اگر f و g دو تابع پیوسته باشند و نتیجه ۴ عمل اصلی بر روی این دو تابع به شرط این که مخرج صفر نشود، همواره پیوسته خواهد بود.

نکته: اگر f و g یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، آنگاه جمع و تفریق آن‌ها ناپیوسته خواهد بود ولی در مورد ضرب و تقسیم چیزی نمی‌توان گفت.

سوال: تابع $f(x) = [(x-1)^2]$ در چند نقطه از بازه $[-1, 1]$ ناپیوسته است؟

$$(x-1)^2 = k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 1 \quad k = 1 \Rightarrow x = 2, 0 \quad k = 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \quad k = 3 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \quad k = 4 \Rightarrow x = 1 \pm 2$$

بنابراین ۶ نقطه در بازه مذکور بدست آمد ($[-1, 1]$) ولی این تابع در نقطه $x=1$ که تابع صفر می‌شود، پیوسته است. بنابراین در ۵ نقطه تابع پیوسته نیست.

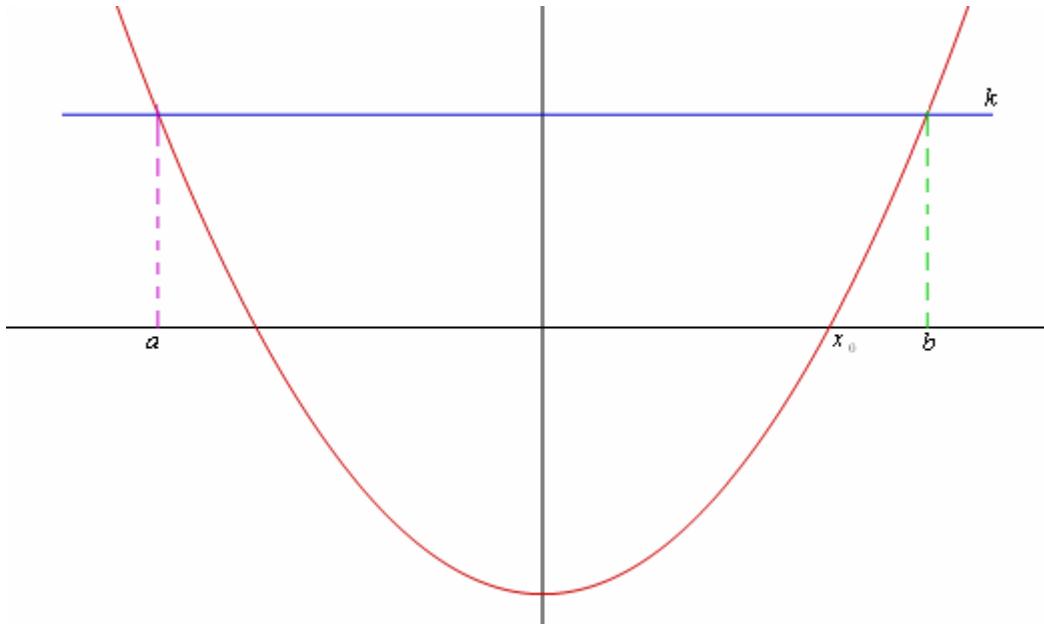
قضیه حمله و ترکیب توابع: اگر $b \in D_f$ باشد و $f(x) = b$ پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b)$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin x) = \cos(\lim_{x \rightarrow 0} \sin x) = 1$

توجه! چون تابع \log همواره روی دامنه اش پیوسته است پس

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در فاصله $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a) < k < f(b)$ باشد، آنگاه حداقل یک ریشه بین a و b دارد. ($\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = k$)

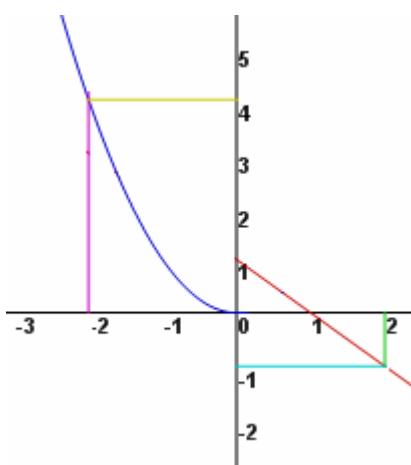


اثبات. فرض کنیم $g(x) = f(x) - k$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - k \\ &\Rightarrow g(a)g(b) < 0 \end{aligned}$$

اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ باشد، آنگاه بین $[a,b]$ حداقل یک ریشه است.

سوال: شرایط قضیه مقدار میانی را برای تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ در بازه $[-2,2]$ بررسی کنید؟



پس شرایط اولیه قضیه برقرار نسیت ولی ریشه وجود دارد، در نتیجه عکس قضیه درست نیست.

اگر f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ باشد، آنگاه معادله $f(x) = 0$ در $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

سوال: بیشترین مقدار k که تابع $y = [x^2]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته باشد را بباید؟

$$f(2) = 4 \quad f(\sqrt{5}) = 5$$

$$4 \leq x^2 \leq 5 \Rightarrow \sqrt{4} \leq x \leq \sqrt{5} \Rightarrow 2 \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$2+k = \sqrt{5} \Rightarrow k = \sqrt{5} - 2$$

سوال: فرض کنید $y = f(x)$ روی $[0, 1]$ پیوسته باشد و برای هر x در این بازه $0 \leq f(x) \leq 1$ باشد، در این صورت ثابت کنید، وجود دارد نقطه c متعلق به بازه $[0, 1]$ به طوری که $f(c) = c$ باشد؟

اگر $f(0) = 0, f(1) = 1$ حکم ثابت است. حال فرض کنیم:

$$f(0) > 0$$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) - x \rightarrow \begin{cases} h(0) = f(0) > 0 \\ h(1) = f(1) - 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{IV.P} \exists c \in [a, b] \quad \exists h(c) = 0$$

$$f(1) < 1$$

$$h(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$$

پس بنا به قضیه میانی وجود دارد x_0 به طوری که $f(x_0) = 0$

سوال: فرض کنید $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ باشد، به طوری که $a < b < c < d$ باشد، ثابت کنید معادله $f(x) = (x-a)(x-c) + \lambda(x-b)(x-d)$ چون $f(x)$ چند جمله‌ای است پس روی اعداد حقیقی پیوسته می‌باشد.

$$f(a) = \lambda(a-b)(a-d)$$

$$\Rightarrow f(a)f(c) = \lambda^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d) \Rightarrow f(a)f(c) < 0$$

$$f(c) = \lambda(c-b)(c-d)$$

پس در بازه $[a, c]$ یک ریشه دارد.

$$f(b) = (b-a)(b-c)$$

$$\Rightarrow f(b)f(d) = (b-a)(b-c)(d-a)(d-c) \Rightarrow f(b)f(d) < 0$$

$$f(d) = (d-a)(d-c)$$

پس در بازه $[b, d]$ یک ریشه دارد.

قضیه: اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\exists k > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq k$$

- تابع f کراندار است. ۲ دارای \min و \max مطلق است.

سوال: آیا تابعی پیوسته و پوشاند $f: [a,b] \rightarrow (c,d)$ وجود دارد؟ نه!!!!

$$R_f = (c,d) \text{ با تعریف پوشاند}$$

$$\Rightarrow (c,d) \neq [f(x_1), f(x_2)]$$

$$R_f = [f(x_1), f(x_2)] \text{ با توجه به قضیه و پیوستگی}$$

پیوستگی توابع مرکب

قضیه: اگر تابع $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ در $x = a$ پیوسته باشد و تابع $y = f(u)$ در نقطه $u = a$ پیوسته باشد، آنگاه $y = f(g(a))$ در نقطه $x = a$ پیوسته است.

$$u = g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0) = g(x_0) = x_0$$

$$y = f(u) = f(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(u) = f(g(x_0))$$

پس تابع $(g \circ f)(x)$ در نقطه x_0 پیوسته است.

سوال: آیا تابع زیر پیوسته است؟

$$y = \sin(\tan x) \quad x = 0$$

اگر $g(x) = \tan x$ باشد، آنگاه $\tan x$ در $x = 0$ پیوسته است. پس اگر $f(x) = \sin x$ باشد، چون $x = 0$ در دامنه \sin قرار دارد پس این تابع پیوسته است.

سوال: فرض کنید $f(x) > 0$ و $f(x) \neq 1$ در x_0 دارای حد

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

باشد، آنگاه

اثبات.

$$h(x) = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \log^{h(x)} = \log^{f(x)^{g(x)}} = g(x) \log^{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log^{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

$$\log^{\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)} = (\log^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)})^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

توجه! اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، در صورت وجود $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ نیز $h(x)$ پیوسته خواهد بود.

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

نکته: if $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

سوال: حد های زیر را حساب کنید؟

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{x^3} \right]^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \right]^{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)}$$

پیوستگی یک تابع معکوس

اگر تابع $y = f(x)$ در فاصله I معین، پیوسته و یکنوا باشد، آنگاه یک معکوس منحصر بفرد $x = f^{-1}(y)$ وجود دارد که در حوزه مقادیر y معین، پیوسته و یکنواست.

سوال: ثابت کنید معادله $x - \alpha \sin x = y = f(x)$ پیوسته دارد.

یکنوا بودن تابع را بررسی می کنیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = x_2 - \alpha \sin x_2, \quad f(x_1) = x_1 - \alpha \sin x_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 - \alpha(\sin x_2 - \sin x_1)$$

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \left| \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \leq 2 \frac{|x_2 - x_1|}{2} = x_2 - x_1$$

$$\text{then } \alpha |\sin x_2 - \sin x_1| \leq x_2 - x_1 \quad \text{then } (x_2 - x_1) - \alpha(\sin x_2 - \sin x_1) > 0$$

چون تابع $f(x)$ در \mathbb{R} پیوسته و یکنواست، وارون آن یکتا و پیوسته است.

تمرینات فصل پنجم:

تمرین: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

تمرین: ثابت کنید هرچند جمله‌ای از درجه فرد، حداقل یک ریشه دارد.

تمرین: نشان دهید تابع $y = \sin x + \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ ریشه دارد.

تمرین: نقاط پیوسته و ناپیوسته توابع زیر را در بازه‌های داده شده تعیین کنید؟

$$1. f(x) = [\sqrt{x}] + [x^2] \quad [0, 4]$$

$$2. f(x) = [\operatorname{sgn} x][\cos \pi x] \quad (-2, 2)$$

$$3. f(x) = [-x^2] + |x + \sqrt{2}| \quad [-\sqrt{3}, \sqrt{2}]$$

تمرین: اگر $g(x) = \begin{cases} 0 & x > -1 \\ x+2 & x \leq -1 \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$ توابع زیر را بررسی کنید؟

تمرین: ثابت کنید $f(x) = (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ ریشه حقیقی دارد.

تمرین: تعداد ریشه‌های معادله $\sin x = \frac{x}{100}$ را بدست آورید؟

تمرین: به ازای چه مقدار c تابع $f(x) = \begin{cases} \tan x - \sec x & x \neq \frac{\pi}{2} \\ c & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ پیوسته است؟

تمرین: حدود زیر را بدون استفاده از هوپیتال حساب کنید؟

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x-a}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+4\tan x}}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| x^2 - x^3 \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\tan^2 2x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$11. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - (1-t)}{t}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{\sin x} - 1) \ln(1 + \sin 2x)}{x \arctan x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{chx - 1}{x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cosh x - \cosh a}{x - a}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{\sin x} + e^{\sin 2x}}{\tanh x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cosh x)}{\ln(\cos x)}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

فصل ششم: توابع هذلولی

دو تابع نمایی $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ را در نظر بگیرید، این دو مقدار در معادله هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ صدق می‌کنند، یعنی می‌توان این دو مقدار را به عنوان شکل پارامتری هذلولی در نظر گرفت. اگر مجموعه این معادلات را با شکل پارامتری دایره مفایسه کنیم، به خاطر شباهت معادلات هذلولی و دایره می‌توان $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ را $\cosh x$ و $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ را $\sinh x$ نامگذاری کرد.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{معادله دایره}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{معادله هذلولی}$$

$$\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases} \quad \text{معادله پارامتری دایره}$$

$$\begin{cases} X = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x > 0 \\ Y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{cases}$$

روابط بین توابع مثلثاتی هذلولی

$$1) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} \quad \sinh x = \pm \sqrt{1 + \cosh^2 x}$$

$$2) \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$3) 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$4) \sinh(x + y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) - (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)]$$

$$\Rightarrow \sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

$$5) \sinh(x - y) = \cosh x \sinh y - \sinh x \cosh y$$

$$6) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$7) \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$8) \coth(x \pm y) = \frac{1}{\coth x \coth y + \frac{1}{1 + \frac{1}{\coth x \coth y}}} \Rightarrow \coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

توجه! اگر $x=y$ باشد، آنگاه داریم:

$$1) \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$2) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$3) \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

مشتق توابع هندسی

$$y = f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(e^u)' = u'_x e^u \Rightarrow y'_x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$y = f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(\tanh x)'}{\tanh^2 x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\tanh^2 x - 1}{\tanh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

وارون توابع هندسی

روش اول:

$$y = f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \longrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow 2ye^x = (e^x)^2 - 1$$

$$\xrightarrow{e^x = A} A^2 - 2yA - 1 = 0 \Rightarrow A = y \pm \sqrt{y^2 + 1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

روش دوم:

$$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x \Rightarrow y + \sqrt{y^2 + 1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \longrightarrow f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\sinh x = \pm \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \pm \sqrt{y^2 - 1} \longrightarrow y \pm \sqrt{y^2 - 1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

مشتق وارون توابع هذلولی

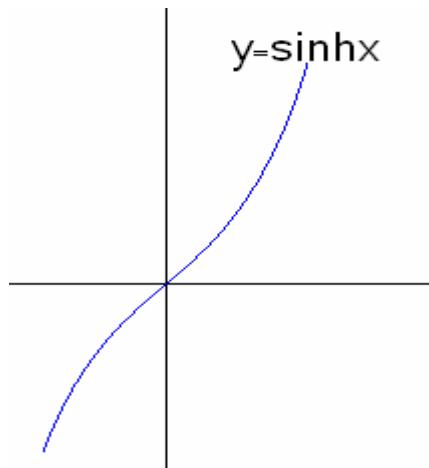
حالت کلی : $y = \sinh u \longrightarrow y' = u'_x \cosh u$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{رابطه ۱}$$

$$y = f(x) = \cosh x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

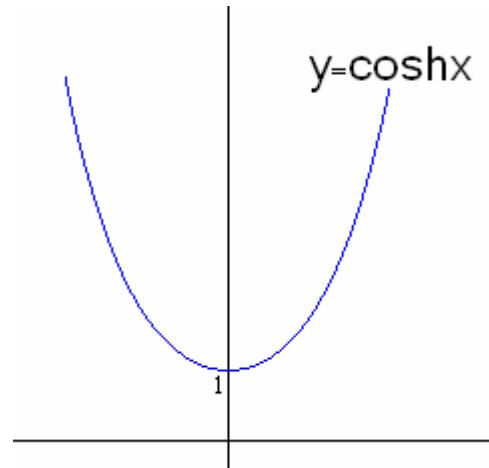
$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\pm \sqrt{y^2 - 1}} \Rightarrow \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\pm \sqrt{x^2 - 1}}$$

نمودار توابع هذلولی



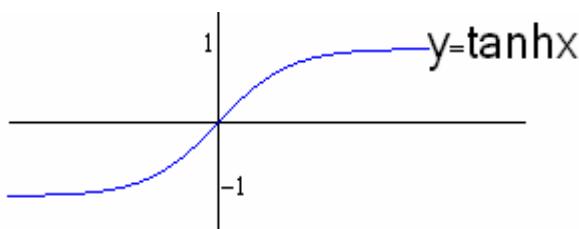
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$



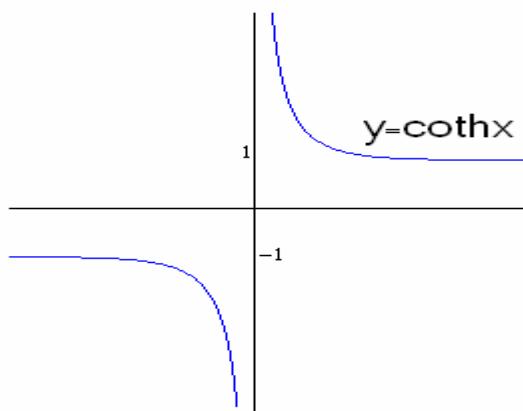
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [1, +\infty]$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-1, 1)$$



$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

تمرینات فصل ششم:

تمرین: فرض کنید $f(x) = \tanh^{-1}(x)$

الف) دامنه، برد و مشتق f را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) ثابت کنید $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

فصل هفتم: مشتق

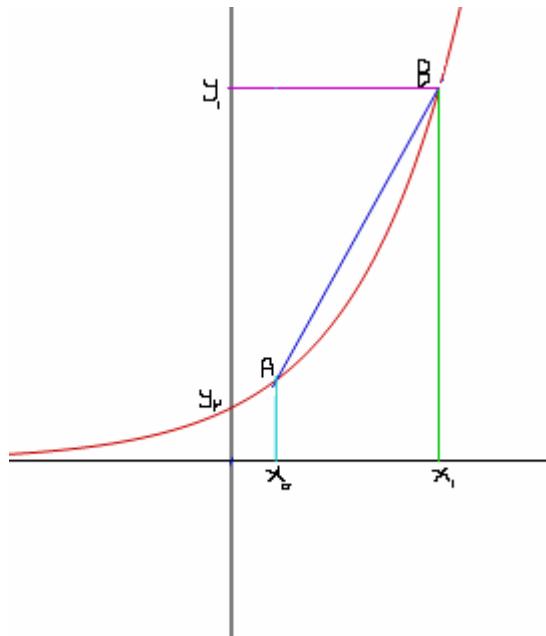
فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد، مشتق تابع f در نقطه x_0 با $f'(x_0)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$1. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$2. f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر حد بالا موجود و متناهی باشد، گوییم تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است.

تعابیر هندسی مشتق



$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \xrightarrow{x_1=x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

سوال: معادلات خطوط قائم و مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه ای به طول x_0 را بدست آورید؟

$$A(x_0, f(x_0))$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow{m'=\frac{1}{m}} y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

سوال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^n$ را بدست آورید؟

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \sum_{r=2}^n \binom{n}{r} x^{n-r} h^r - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

$$\text{نکته: } a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

سوال: مشتق تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید؟

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0}$$

$$\text{if } a = \sqrt[n]{x}, b = \sqrt[n]{x_0} \implies x - x_0 = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0})(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}x_0} + \dots + \sqrt[n]{xx_0^{n-2}} + \sqrt[n]{x_0^{n-1}})$$

$$A = (\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}x_0} + \dots + \sqrt[n]{xx_0^{n-2}} + \sqrt[n]{x_0^{n-1}})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} \times \frac{A}{A} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{A} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1}$$

سوال: مشتق تابع $y = \log_a^x$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید؟

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a^{x+h} - \log_a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a^{\frac{x+h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\log_a^{\frac{1+\frac{h}{x}}{x}} \right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right) = \log_a^{e^{x^{-1}}} = \frac{1}{x} \log_a^e = \frac{1}{x \ln a}$$

قضیه: اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه پیوسته نیز هست. (عکس قضیه برقرار نیست).

سوال: پیوستگی و مشتق پذیر بودن تابع $|x|$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0 = f(0)$$

تابع پیوسته است.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f'(0) = 1 \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow f'(0) = -1 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست.

مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره ای

فرض کنید $y=f(x)$ و $u=g(x)$ باشد، تابع g در نقطه x مشتق پذیر و تابع f در نقطه u مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du} = u'_x f'(u)$$

سوال: مشتق توابع زیر را بیابید؟

$$1. y = \sin u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du} = \frac{du}{dx} (\sin u)' = u'_x \cos u$$

$$2. \quad y = \log_a^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du} = \frac{du}{dx} (\log_a^u)' = \frac{u'x}{u \ln a}$$

سوال (قضیه): اگر $y=f(x)$ تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن $x=g(y)$ باشد، مشتق g را بر حسب مشتق f بدست آورید؟

$$g'(x) = \frac{dx}{dy}$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \longrightarrow f'(x)g'(y) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\text{یا } \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} = 1$$

سوال: اگر $f(x) = \cot^{-1} x$ باشد، مشتق آن را بدست آورید؟

$$y = f(x) = \cot^{-1} x$$

$$x = f^{-1}(y) = \cot(y) = g(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{(1+\cot^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(y) = -(1+\cot^2 y)$$

مشتق تابع ضمنی

برای بدست آوردن مشتق تابع ضمنی از طرفین $f(x,y)=0$ نسبت به x مشتق می‌گیریم، معادله‌های بدست خواهد آمد

که آن را بر حسب $\frac{dy}{dx}$ باید بدست آورد، پاسخ این معادله مشتق ضمنی است.

$$\text{مثال: } (y^n)' = ny'^x \cdot y^{n-1} = n \frac{dy}{dx} y^{n-1}$$

سوال: مشتق عبارات زیر را بدست آورید؟

$$1. \quad y^3 - 3xy + x^3 = 0$$

$$3 \frac{dy}{dx} y^2 - 3(y + x \frac{dy}{dx}) + 3x^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} (y^2 - x) = -x^2 + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 + y}{y^2 - x}$$

$$2. \ y = x^{\frac{p}{q}}$$

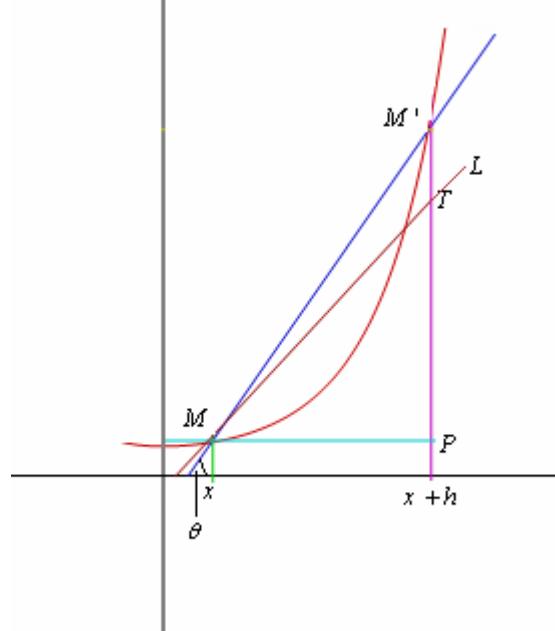
$$\begin{aligned}y^q = x^p &\longrightarrow q \frac{dy}{dx} y^{q-1} = p \frac{dx}{dx} x^{p-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \times \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} x^{p-1} y^{1-q} \\&= \frac{p}{q} x^{p-1} x^{(1-q)^q} = \frac{p}{q} x^{\frac{pq-q+p-pq}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

دیفرانسیل

فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد، دیفرانسیل x را با $dx = \Delta x$ نشان می‌دهیم. از آن جایی که x متغیر مستقل است، پس Δx یا dx یا $f'(x)dx$ هر مقداری را می‌تواند اختیار کند. دیفرانسیل y را با dy نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dy = f'(x)dx$$

تعابیر هندسی دیفرانسیل



$$M \left|_{f(x)}^x \quad M' \left|_{f(x+h)}^{x+h} \quad P \left|_{f(x)}^{x+h}$$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = M'P$$

$$f'(x) = \tan \theta = \frac{TP}{\Delta x} \Rightarrow TP = f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy$$

$$M'P = \Delta f = TP + M'T = dy + M'T \quad \text{رابطه ۱}$$

$$\rightarrow \Delta f > dy$$

$$\Delta f > dy \xrightarrow{\div \Delta x} \frac{\Delta f}{\Delta x} > \frac{dy}{\Delta x} \xrightarrow{(*)} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x} + \varepsilon > 0 \Rightarrow \Delta f = dy + \Delta x \varepsilon \quad \text{رابطه ۲}$$

$$\Rightarrow \Delta f = f'(x)dx + \Delta x \varepsilon$$

$$(*) \text{ if } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow M'T \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y = \Delta f = dy$$

$$M'T = \Delta x \varepsilon \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f \approx f'(x)dx$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx \Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f'(x)dx + f(x) \quad \text{با مقایسه دو رابطه ۱ و ۲ خواهیم داشت:}$$

معادله خط L برابر است با: $L(x) = y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$M \begin{cases} x_0 \\ f(x_0) \end{cases} \quad M \begin{cases} x_0 + h \\ f(x_0 + h) \end{cases} \quad P \begin{cases} x_0 + h \\ f(x_0) \end{cases} \quad T \begin{cases} x_0 + h \\ L(x_0 + h) \end{cases}$$

$$\text{if } h \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_0 + h) \rightarrow L(x_0 + h)$$

$$f(x) \approx L(x) \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

سوال: صورت خطی $f(x) = \sqrt{1+x}$ را در نقطه $x_0 = 0$ بنویسید؟

$$f(x_0) = 1 \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$f(1) = \sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}$$

$$f(0.2) = \sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.1$$

$$f(0.06) = \sqrt{1.06} \approx 1 + \frac{0.06}{2} = 1.03$$

سوال: شعاع دایره ای در آغاز ۱۰ می باشد، آن را به اندازه ۱،۰ افزایش می دهیم، مساحت آن چه تغییری خواهد کرد؟

$$r_0 = 10 \quad dr = 0.1$$

$$f(r) = A \Rightarrow f(r) = \pi r^2 \quad f'(r) = 2\pi r$$

$$\Delta A = f(r + dr) - f(r) = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(d^2 r + 2rdr) \Rightarrow \Delta A = 2.01\pi$$

$$\Delta A \approx dA \longrightarrow f'(r) = dr = \Delta A \Rightarrow \Delta A = 2\pi r \cdot dr \Rightarrow \Delta A = 2\pi$$

دیفرانسیل های متوالی

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\Delta x) = f''(x)\Delta x + (\Delta x)'f'(x)$$

از مقدار جزئی $(\Delta x)'f'(x)$ صرف نظر می کنیم. پس:

$$d^2y = f''(x)\Delta x$$

حالات کلی : $d^n y = f^{(n)}(x) \Delta x$

دیفرانسیل مرتبه n ام

$$dy = f'(x)dx = g(x)$$

$$\Rightarrow d(dy) = d^2y = (f'(x)dx)' = (f''(x)dx + (dx)f'(x))dx \Rightarrow d^2y = f''(x)dx^2$$

$$d(g(x)) = g'(x)dx$$

حالات کلی : $\Rightarrow d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$

توجه !

$$\begin{cases} f(x + \Delta x) = f(x) + f'(c)(x - \Delta x) & \text{دقیق} \\ f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x & \text{تقریبی} \end{cases}$$

کاربرد مشتق

قضیه: اگر تابع f در فاصله $I \in D_f$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و اگر در این فاصله صعودی باشد، آنگاه

$$\forall x \in I \Rightarrow f'(x) > 0$$

و اگر تابع در این فاصله نزولی باشد، آنگاه

$$\forall x \in I \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$if \quad f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$if \quad f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

مثال: تابع $f(x) = x^3 - x + 2$ را در نظر بگیرید:

$D_f = \mathbb{R}$ \Rightarrow پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f'(x)$	+	-	+
	↗	↘	↗

نقاط اکسٹرمم نسبی

تابع f در نقطه x_0 دارای ماکزیمم نسبی است، اگر یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که برای تمام x های متعلق به این همسایگی داشته باشیم:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \exists \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

تابع f در نقطه x_0 دارای می نیم نسبی است، اگر یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که برای تمام x های متعلق به این همسایگی داشته باشیم:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

نکته: با توجه به تعاریف اکسٹرمم های نسبی می توان ماکزیمم و می نیم مطلق را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) : \text{ماکزیمم مطلق}$$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) : \text{می نیم مطلق}$$

قضیه: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 و در همسایگی آن پیوسته بوده و تابع در نقطه x_0 مشتق پذیر نیز باشد. اگر x_0 یک اکسٹرم نسبی باشد، آنگاه $f'(x_0) = 0$ است.

اثبات: با توجه به تعریف اکسٹرم های نسبی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad D_f = [-3, 3] : \text{مثال}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, \pm 3 \longrightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(\pm 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 3] : \text{نقاط بحرانی}$$

قضیه رول

فرض کنیم، تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در نقاط (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر $f(a) = f(b)$ باشد، نقطه $c \in (a, b)$ به طوری که

تعمیم قضیه رول (قضیه مقدار میانگین برای مشتق)

فرض کنیم شرایط قضیه رول برقرار باشد (به غیر از $f(a) = f(b)$) در این صورت:

$$\exists c \in (a, b) \quad \exists \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

اثبات.

$$h'(c) = f(b) - f(a) - f'(c)(b - a) \longrightarrow h(x) = x(f(b) - f(a)) - f(x)(b - a)$$

تابع پیوسته و مشتق پذیر است و $f(a) = f(b)$ می باشد. پس شرایط قضیه رول برقرار است، در نتیجه

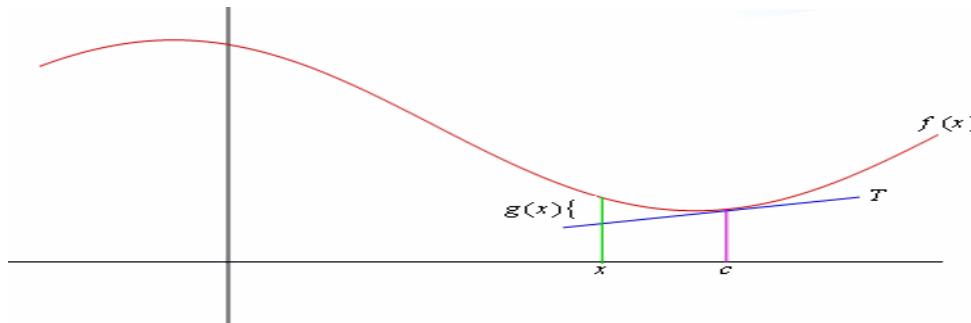
$$h'(c) = f(b) - f(a) - f'(c)(b - a) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

مثال: نشان دهید تابع $y = x^{2k+1} + Px + q = 0$ با شرط $k \geq 0$ و $P > 0$ دقیقاً یک ریشه دارد؟
 $f(x) = x^{2k+1} + Px + q$ $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(-\infty) < 0$ ، $f(+\infty) > 0$

برهان خلف: فرض کنیم تابع f دو ریشه دارد به طوری که $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه در بازه $[x_1, x_2]$ داریم:
 $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = (2k+1)x^{2k} + P > 0$
معادله $(x')'$ هیچ ریشه ای ندارد پس x_2 ای وجود ندارد و تابع فقط یک ریشه دارد.

تقریر منحنی و نقطه عطف

تابع $y = f(x)$ در نقطه $x=c$ دارای تقریر رو به بالاست (تقریر مثبت): اگر در نقطه c ، مشتق تابع در این نقطه و یک همسایگی آن موجود باشد، به طوری که نمودار f بالای خط مماس بر منحنی در این نقطه باشد.
تابع محدب: هر خط مماس بر منحنی که رسم کنیم، منحنی یا نمودار در بالای آن خط مماس باشد.



$$T(x) = y = f(c) + f'(c)(x - c) \quad f(x) > T(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) - T(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x - c)) \Rightarrow \begin{cases} \text{تقریر مثبت if } g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > T(x) \\ \text{تقریر منفی if } g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < T(x) \end{cases}$$

قضیه: فرض کنیم تابع f در نقطه c و همسایگی آن دارای مشتق باشد، تابع در نقطه $(c, f(c))$ دارای تقریر مثبت است، اگر $f''(c) > 0$ و اگر $f''(c) < 0$ باشد، تابع دارای تقریر منفی است. (در تقریر مثبت در همسایگی $g(x) > 0$ و در تقریر منفی در همسایگی $g(x) < 0$)
اثبات.

$$f''(c) > 0 \Rightarrow \exists N(c, \delta) \ni \text{if } x < c \Rightarrow f'(x) < f'(c)$$

$$f''(c) < 0 \Rightarrow \exists N(c, \delta) \ni \text{if } x > c \Rightarrow f'(x) > f'(c)$$

$$g(t) = f(t) - [f(c) - f'(c)(t - c)] \quad [c, x]$$

$$MVT: \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = g'(z) \quad c < z < x \Rightarrow \frac{g(x)}{x - c} = g'(z) \Rightarrow g(x) = (x - c)g'(z)$$

$$\Rightarrow g(x) = (x - c)(f'(z) - f'(c)) \Rightarrow g(x) > 0$$

تعیین اکسٹرمم های نسبی به کمک مشتق دوم

فرض کنیم تابع f تابعی باشد که $x=c$ یک نقطه بحرانی برای آن است و هم‌چنین فرض کنیم f' در یک همسایگی c تعریف شده باشد، در این صورت $f(c)$ ماکزیمم نسبی است. اگر $f''(c) < 0$ باشد و $f''(c) \geq 0$ نیم نسبی است، اگر $f''(c) > 0$ باشد.

اگر $f''(c) = 0$ باشد، از مشتق دوم برای تعیین ماکزیمم و می نیم نسبی نمی توان استفاده کرد.

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{x} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^4 - 3}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{نقاط بحرانی}$$

$$f''(x) = \frac{12x^3 x^2 - 2x(3x^4 - 3)}{x^4} = \frac{6x^4 + 6}{x^3} = 6x + \frac{6}{x^3}$$

$f''(1) = 12 > 0 \rightarrow x = 1$ می نیم نسبی

$f''(-1) = -12 < 0 \rightarrow x = -1$ ماکزیمم نسبی

نقطه عطف

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف تابع f گویند، اگر یک همسایگی c مانند (a, b) وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در فاصله $(c, f(c))$ داشته باشیم $f''(x) > 0$ و برای هر x در فاصله (a, b) داشته باشیم $f''(x) < 0$ یا به عکس. پس $f''(c) = 0$ نقطه عطف است.

قضیه: اگر تابع f ، تابعی باشد که برای نقطه‌ای مانند $x=c$ وجود دارد، به طوری که $f''(x) = 0$. در صورتی نقطه $(c, f(c))$ ، نقطه عطف این تابع است که یک همسایگی از c مانند (a, b) وجود داشته باشد، به طوری که:

(۱) $f''(x)$ در همسایگی مذکور وجود داشته و برای هر x در این فاصله (به جز $x=c$) $f''(x) \neq 0$ باشد.

$$f''(a)f''(b) < 0 \quad (۲)$$

قضیه کوشی (تعمیم مقدار میانگین)

فرض کنیم توابع f و g در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد و هم چنین بازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم، آنگاه نقطه‌ای مانند $z \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که شرط این که $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$ باشد. (به شرط این که $(g(b) \neq g(a))$ اثبات.

تابع پیوسته و مشتق پذیر است و هم چنین $(h(a) = h(b)) \rightarrow h'(z) = 0$

سوال: با استفاده از قضیه کشی ثابت کنید: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$

$$f(t) = \ln(t+1)$$

$$b = x_1 \quad a = 0$$

$$g(t) = t$$

$$\frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x+1-1} = \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \ln(x+1) = \frac{x}{x+1} \quad 0 < x < x$$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{x+1} < \frac{x}{0+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

قضیه هوپیتال (شرط استفاده از این قضیه فقط برقراری شرایط)

فرض کنیم تابع f و g در یک همسایگی از c مشتق پذیر باشد (احتمالاً غیر از خود c ، اگر $g'(x) \neq 0$ باشد، بازای $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ یا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ و اگر $x \neq c$ اثبات.

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{کشی: } \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(z)}{G'(z)} \quad c < z < x \\ & \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(z(x))}{g'(z(x))} = k \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(z(x))}{g'(z(x))} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

فرض کنیم تابع $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ طوری باشد، که مشتقات اول تا n ام آن روی فاصله $[a,b]$ موجودند، تعریف شود و همچنین مشتق n ام تابع f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته و در روی نقاط داخلی آن مشتق پذیر باشد، در این صورت:

$$P(x) = \sum_{r=0}^n c_r (x-a)^r$$

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \implies f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) = c_0 + c_1(x-a)$$

$$f(a) = c_0 \Leftrightarrow P(a) = f(a)$$

$$P'(a) = f'(a) \Rightarrow c_1 = f'(a)$$

$$P''(a) = f''(a) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{r=0}^n c_r (x-a)^r = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)(x-a)^r}{r!}$$

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad \exists f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

توجه! به $\frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ باقی مانده می‌گویند.

نکته: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و مشتقات پیوسته تا مرتبه $n-1$ در این فاصله داشته باشد و مشتق متناهی مرتبه n ام در نقاط داخلی (a,b) موجود باشد، آنگاه

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)(x-a)^r}{r!} + f^{(n)}(\xi) \frac{(x-a)^n}{n!} \quad \xi \in (a,b)$$

$$\xi = a + \theta(x-a) \quad 0 < \theta < 1$$

تعمیم قضیه مقدار میانگین

$$\text{if } n=0 \Rightarrow f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

$$\text{توجه! } f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)(x-a)^r}{r!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

بسط مک لورن

$$\text{if } a=0 \rightarrow f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(0)x^r}{r!} + \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

سوال: بسط مک‌لورن هریک از توابع زیر را بنویسید؟

1. $f(x) = e^x$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x = \sum_{r=0}^n \frac{x^n}{r!} + \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

2. $f(x) = \sin x$

$$(\sin x)^n = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

3. $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)^n = \cos(x - \frac{n\pi}{2})$$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

نکته: می‌توان برای تابع $f(x) = e^x$ سری به صورت زیر تعریف کرد:

$$f(x) = e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^n}{r!}$$

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{r!}$$

سوال: یک قوطی کنسرو با حجم مشخص با شکل استوانه‌ای دایره‌ای قائم را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم در ساخت آن از کم ترین مواد استفاده کنیم، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن چقدر خواهد بود؟

$$V = \pi r^2 h \longrightarrow V' = 0$$

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dr} = \pi(2rh + \frac{dh}{dr}r^2) = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dr} = \frac{-2h}{r}$$

$$\frac{ds}{dr} = 0 \Rightarrow 2\pi(2r + h + r \frac{dh}{dr}) = 0 \Rightarrow \frac{h}{r} = 2$$

سوال: مایعی که در قیف کوچکی به شکل مخروط ریخته شده است، با آهنگ $12 \text{ cm}^3/\text{s}$ از ته قیف بیرون می‌ریزد. ارتفاع قیف 20 cm و شعاع قاعده بالایی آن 4 cm است. وقتی که سطح مایع 5 cm بالاتر از ته قیف قرار دارد، ارتفاع مایع با چه سرعتی کم می‌شود؟

$$V' = -12 \text{ cm}^3/\text{s} \quad h_0 = 20 \text{ cm} \quad r_0 = 4 \text{ cm} \quad h'_t = ?$$

$$\frac{h(t)}{r(t)} = \frac{h_0}{r_0} = \frac{20}{5} = 5$$

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t) \longrightarrow V'(t) = 2r'(t)r(t)h(t) + h'(t)r^2(t) = \frac{-36}{\pi}$$

$$\frac{\frac{dV}{dt} = -12 \text{ cm}^3/\text{s}}{\rightarrow} \begin{cases} h(t) = 5r(t) \\ h'(t) = 5r'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{-12}{\pi} \end{cases}$$

سوال: میله‌ای به طول $\sqrt{\pi} + 2$ موجود است. از نقطه‌ای روی آن، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، سپس یکی را به شکل دایره و قسمت دیگر را به شکل مربع در می‌آوریم. نقطه برش را طوری بدست آورید که مساحت دایره و مربع حاصل برابر شوند؟

$$S_1 = \pi r^2 \quad P_1 = 2\pi r_1 = 2 + \sqrt{\pi} - x$$

$$S_2 = r^2 \Rightarrow S_2 = \frac{x^2}{16} \quad P_2 = 4r_2 = x \Rightarrow r_2 = \frac{x}{4}$$

$$2\pi r_1 = 2 + \sqrt{\pi} - x \Rightarrow r_1 = \frac{2 + \sqrt{\pi} - x}{2\pi} \longrightarrow S_1 = \pi r_1^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{\pi} - x}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{(2 + \sqrt{\pi} - x)^2}{4\pi} = \frac{x^2}{16} \Rightarrow (2 + \sqrt{\pi} - x)^2 = \frac{x^2\pi}{4} \Rightarrow 2 + \sqrt{\pi} - x = \pm \frac{\sqrt{\pi}x}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt{\pi} - x = -\frac{\sqrt{\pi}x}{2} \Rightarrow 4 + 2\sqrt{\pi} - 2x = -\sqrt{\pi}x \Rightarrow 4 + 2\sqrt{\pi} = x(2 - \sqrt{\pi})$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 + 2\sqrt{\pi}}{2 - \sqrt{\pi}} \times \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2 + \sqrt{\pi}} \Rightarrow x = \frac{8 + 2\pi + 8\sqrt{\pi}}{4 - \pi}$$

سوال: ثابت کنید، اگر $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ باشد، آنگاه $x^m y^n = c$ حداقل است. هرگاه $x + y$ باشد.

$$x^{-m}c = y^n \Rightarrow y = \sqrt[n]{\frac{c}{x^m}}$$

$$f(x) = x + \sqrt[n]{cx^{-m}} = x + c^{\frac{1}{n}} x^{\frac{-m}{n}} \longrightarrow f'(x) = 1 - \frac{m}{n} c^{\frac{1}{n}} x^{\frac{-m-1}{n}} = 0$$

$$\frac{n}{m} c^{\frac{-1}{n}} = x^{\frac{-m-1}{n}} \Rightarrow x^{\frac{-m+n}{n}} = \frac{n}{m} c^{\frac{-1}{n}}$$

$$\frac{1}{x^{\frac{m+n}{n}}} = \frac{n}{m} c^{-1} \Rightarrow x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{m}{n} c \Rightarrow x = \sqrt[n]{(\frac{m}{n} c)^{m+n}} \Rightarrow x = \frac{m}{n} c \sqrt[n]{(\frac{m}{n} c)^m}$$

سوال: طول مستطیلی که مساحت ثابت $800mm^2$ دارد، با آهنگ $4m/s$ افزایش می یابد. در لحظه ای که عرض مستطیل با آهنگ $0.5m/s$ کاهش یابد، عرض مستطیل چقدر است.

t : طول مستطیل در لحظه t

t : عرض مستطیل در لحظه t

$$L(t)W(t) = 800mm^2 \quad W'(t) = -0.5L'(t) = 4$$

از طرفین مشتق می گیریم، آنگاه

$$L'(t)W(t) + W'(t)L(t) = 0$$

$$W(t) - 0.5L(t) = 0 \Rightarrow \frac{W(t)}{L(t)} = \frac{0.5}{4} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{W(t)}{L(t)} = \frac{1}{8} \Rightarrow L(t) = 8W(t)$$

$$8(W(t))^2 = 800 \Rightarrow W(t) = 10mm$$

سوال: ذره ای روی منحنی $x^2 - 18y^2 = 9$ طوری حرکت می کند که مختص y آن با آهنگ ثابت ۹ واحد در ثانیه افزایش می یابد. وقتی $x = 9$ ، مختص x ذره با چه آهنگی تغییر می کند؟

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

$$2xx' - 36yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{xx'}{18y} \quad y' = 9, x = 9$$

$$\Rightarrow x' = 18y$$

$$\text{when } x = 9 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x' = \pm 18 \times 2 = \pm 36$$

تمرینات فصل هفتم:

تمرین: معادلات خطوط مماس بر منحنی $y = f(x) = 3x$ را در نقطه $A(-1, -1)$ بدست آورید؟

تمرین: اگر $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ باشد، پیوستگی و مشتق پذیری آن را بررسی کنید؟

تمرین: ثابت کنید:

$$1) |\tan^{-1} y - \tan^{-1} x| \leq |y - x|$$

$$2) |\sin^{-1} x - \sin^{-1} y| \leq |x - y|$$

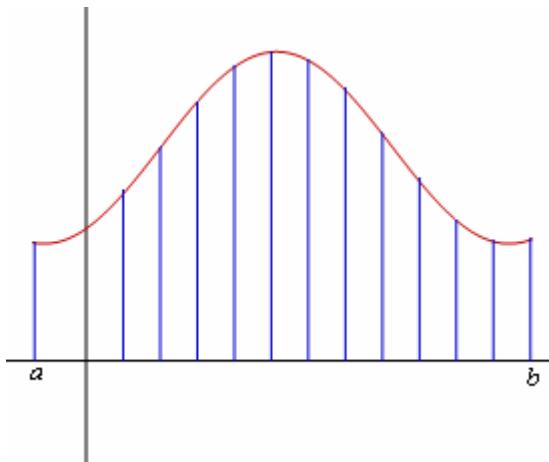
تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \tan^{-1} x$ را بدست آورید؟

تمرین: وارون و مشتق تابع $\tanh x$ را بدست آورید؟

تمرین: ثابت کنید که $e^x \geq 1+x$ می باشد.

فصل هشتم: انتگرال

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد، بازه $[a, b]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم. (n قسمت لزوماً مساوی نیست). با انتخاب $n - 1$ نقطه دلخواه در فاصله $[a, b]$ که آن را یک افزار از آن می‌نامیم. $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ طول هر زیر فاصله را Δx_i می‌نامیم، یعنی فاصله $[x_{i-1}, x_i]$ را $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ تعریف می‌کنیم. طول بزرگترین مقدار Δx_i را طول (طول بزرگترین زیر فاصله) نرم افزار گوییم و با علامت $\|\Delta\| = \max\{\Delta x_i\}$ نشان می‌دهیم.



$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \\ [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] &\quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\ \|\Delta\| &= \max\{\Delta x_i\} \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم تابع f صعودی باشد، آنگاه $f(x_{i-1}) < f(x_i)$ خواهد بود، بنابراین مساحت مستطیل بزرگتر از زیر فاصله i ام $\Delta x_i f(x_{i-1})$ و مستطیل کوچکتر $\Delta x_i f(x_i)$ خواهد بود. اگر مجموع مساحت مستطیل‌های بزرگتر و کوچکتر را حساب کنیم، واضح است که مساحت زیر منحنی f در فاصله $[a, b]$ مابین این دو مساحت خواهد بود.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_{i-1}) &\\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_{i-1}) &\leq S \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i)$$

حال اگر تعداد زیر فاصله‌ها را افزایش دهیم مساحت مستطیل‌های کوچکتر و بزرگتر به هم دیگر نزدیک خواهند بود و در حالت حدی وقتی $n \rightarrow \infty$ میل می‌کند، این دو مساحت با هم دیگر برابر می‌شوند، در نتیجه با توجه به قضیه فشردگی مساحت زیر منحنی نیز برابر مساحت مستطیل‌ها خواهد بود.

مجموع ریمانی تابع $f(x)$ را در فاصله $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i f(c_i) \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

اگر $f(x) > 0$ باشد، مساحت $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(c_i)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(c_i)$$

با توجه به تعریف بالا تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ انتگرال پذیر است، اگر حد بالا موجود باشد.

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

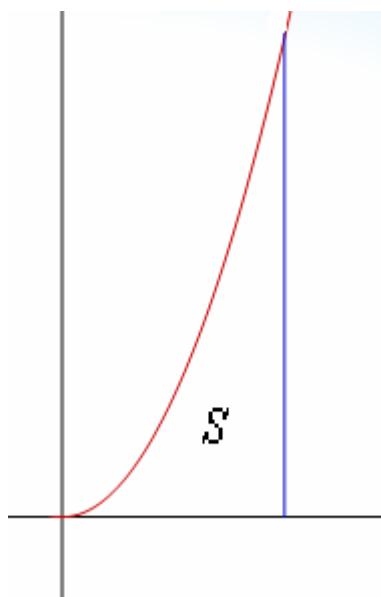
$$\sum_{n=0}^{\infty} h(x) = \sum f(x) + \sum g(x)$$

اگر موجود باشد این گونه است.

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{2} = \Delta x$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = a \\ x_1 = a + \frac{b-a}{2} \\ x_2 = a + 2\left(\frac{b-a}{2}\right) \\ \vdots \\ x_i = a + i\left(\frac{b-a}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{2} f(c_i)$$

سوال: فرض کنید $f(x) = x^3$ و مساحت محصور بین خطوط $x=1$ و $x=0$ را با تعریف مساحت انتگرال معین حساب کنید؟



$$x_i = \frac{b-a}{2} = \Delta x = \frac{1}{n}$$

$$x_i = \frac{i}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=0}^n i^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{مثال: } f(x) = \int_0^x t^3 dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x}{n} \left(\frac{ix}{n} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{n^4} \sum_{i=0}^n i^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = \frac{x^4}{4}$$

- ۱) $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
- ۲) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- ۳) $\int_a^a f(x)dx = 0$
- ۴) if $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- ۵) $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- ۶) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

قضیه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر است. (عکس قضیه برقرار نیست).

اگر تابع f انتگرال پذیر نباشد، پس پیوسته نخواهد بود.

سوال: اگر $\int_a^b (x^2 - 1)g(x)dx$ موجود نباشد، چه شرطی باید $(x)g(x)$ داشته باشد؟ اگر تابع $(x)g(x)$ پیوسته نباشد، پس مشتق پذیر نیز نخواهد بود.

سوال: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ انتگرال پذیر است؟ چون ریمان بالا و پایین با هم برابر نیست، پس انتگرال پذیر نخواهد بود:

$$U(f, P) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n M_i \Delta x_i \quad M_i = \text{Sup}(f(x)) \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$L(f, P) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n m_i \Delta x_i \quad m_i = \text{Inf}(f(x))$$

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f, P)$$

چون $1 = L(f, P) = U(f, P)$ پس انتگرال پذیر نیست، زیرا:

$$L(f, P) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum \Delta x_i m_i = 0 \Rightarrow 0 \neq b - a \longrightarrow \text{انتگرال پذیر نیست}$$

$$U(f, P) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum \Delta x_i M_i = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum \Delta x_i \times 1 = b - a$$

سوال: انتگرال زیر را حساب کنید؟

$$\int_0^{\sqrt[3]{4}} [x^3] dx = \int_0^1 [x^3] dx + \int_0^{\sqrt[3]{2}} [x^3] dx + \int_0^{\sqrt[3]{3}} [x^3] dx + \int_0^{\sqrt[3]{4}} [x^3] dx \\ = 0 + (\sqrt[3]{2} - 1) + 2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + 3(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})$$

توجه! $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ $c_0 = a < c_1 < \dots < c_n < b = c_{n+1}$

نکته: $\int_a^b k dx = \frac{b-a}{n} k = (b-a)k$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در فاصله $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

اثبات.

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M \xrightarrow{\text{IYT}} \exists c \in [a,b] \quad \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(c)$$

مثال: $f(x) = \cos^n \pi x \quad [0,1], n = 2k+1$

$$-1 \leq \cos^n \pi x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \int_0^1 \cos^n \pi x dx \leq 1$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 1, f(-1) = -1, f'(x) = -n \sin \pi x \cos^{n-1} \pi x \xrightarrow{f'(x)=0} x=0, x=\frac{1}{2}, x=1$$

if $n = 2k$

$$f(1) = 1, f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, f(-1) = 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \cos^n \pi x dx \leq 1$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر تابع f روی بازه I که شامل نقطه a است، پیوسته باشد:

الف) اگر تابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ تعریف شود، این تابع خوش تعریف است، معین است و مشتق پذیر

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)f(c)}{h} \xrightarrow[c \in [x, x+h]} \quad \text{اثبات:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

ب) اگر F^* یک تابع اولیه برای f باشد، یعنی $\frac{dF^*(x)}{dx} = f(x)$ است، در این صورت بازای هر $b \in I$ خواهیم

داشت:

$$\forall b \in I \quad \int_a^b f(t)dt = F^*(b) - F^*(a) = F(b) - F(a)$$

اثبات.

$$\text{if } F(x) = \int_a^b f(t)dt, \quad \text{می دانیم} \quad F'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow (F^* - F)' = 0 \Rightarrow F^* - F = -k \Rightarrow F^* = F + k \Rightarrow \begin{cases} F(b) = F^*(b) + k \\ F(a) = F^*(a) + k = 0 \Rightarrow -F^*(a) = k \end{cases}$$

تفاوت F^* و F برابر k است.

$$\text{ثبات دیگر:} \quad \int_a^b f(t)dt = \int_{a_0}^b f(t)dt - \int_{a_0}^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

ثبات دیگر: تابع جدید $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ را در نظر می گیریم، با توجه به قسمت (الف) قضیه اساسی داریم:

$F'(x) = f(x)$ و چون بنا به فرض مسئله $F^*(x) = f(x)$ است و با توجه به قضیه مقدار میانگین تفاضل این دو تابع

مقدار ثابتی خواهد بود، یعنی $F(x) = F^*(x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$ پس خواهیم داشت:

$$F(b) = F^*(b) + k = \int_a^b f(t)dt \quad \text{رابطه ۱}$$

$$F(a) = F^*(a) + k = \int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow k = -F^*(a)$$

اگر در رابطه ۱، $k = -F^*(a)$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$F(b) = F^*(b) - F^*(a) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3} \quad \text{مثال:}$$

مشتق گیری از انتگرال

فرض کنیم، تابع $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ است، در این صورت: $F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$ مثال: $(\int_x^{2x} \tan t dt)' = 2 \tan(2x) - \tan x$

تابع اولیه یا انتگرال نامعین

اگر مشتق تابع $f(x)$ باشد، به تابع F یک تابع اولیه f گویند.
توجه! هر تابع اولیه ندارد و مفهوم انتگرال پذیر بودن در حالت کلی مستقل از تابع اولیه داشتن است. مانند: e^{x^2}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{x + \sin x} \text{ یا } \frac{\sin x}{x}$$

روش کلی برای بدست آوردن تابع اولیه

روش عمومی این است که در زیر علامت انتگرال مشتق تابع و خود تابع را ظاهر کنیم، مانند:

$$\int u'_x u^m dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C \quad \int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C$$

سوال: انتگرال های زیر را حساب کنید؟

$$1) \int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C$$

$$2) \int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$3) - \int -\sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1}}{n+1} + C$$

روش های انتگرال گیری

۱ - روش تغییر متغیر

اگر u یک تابع مشتق پذیر در فاصله (a, b) باشد و تعریف کنیم: $u_{(a)} = A$ و $u_{(b)} = B$ و تابع f روی برد u پیوسته باشد، آنگاه خواهیم داشت:

سوال: انتگرال های زیر را حساب کنید؟

$$1) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\sqrt{x} = u \longrightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du = 2u du$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin u}{u} \cdot (2u du) = 2 \int \sin u du = -2 \cos u + c = -2 \cos \sqrt{x} + c$$

$$2) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$: \text{روش اول} \quad -3 \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = -3\sqrt{1-x^2} + c$$

$$1-x^2 = t \longrightarrow -2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{-dt}{2}$$

: روش دوم

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\frac{-3}{2} dt}{\sqrt{t}} = -3 \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -3\sqrt{t} + c = -3\sqrt{1-x^2} + c$$

۲ - روش جز به جز

فرض کنید u و v توابعی از x باشند، آنگاه

$$d(uv) = u dv + v du \longrightarrow u dv = d(uv) - v du \Rightarrow \int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

$$1) I = \int x \cos x dx$$

$$\begin{cases} x = u \\ \cos x dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \sin x = v \end{cases} \Rightarrow I = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$2) I = \int x^2 \sin x dx$$

$$\begin{cases} x^2 = u \\ \sin x dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x dx = du \\ -\cos x = v \end{cases} \Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

$$3) I = \int \cos(\ln x) dx$$

$$\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$I = \int e^t \cos t dt$$

$$\begin{cases} e^t = u \\ \cos t dt = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = e^t dt \\ v = \sin t \end{cases} \Rightarrow I = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt$$

$$\text{if } J = \int e^t \sin t dt$$

$$\begin{cases} e^t = u \\ \sin t dt = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = e^t dt \\ v = -\cos t \end{cases} \Rightarrow J = -e^t \cos t + \int e^t \cos t dt$$

$$I = e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt \Rightarrow 2I = e^t \sin t + e^t \cos t \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^t \sin t + e^t \cos t)$$

$$4) I = \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$$

$$\frac{x^3 = u}{3x^2 dx = du} \rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = Arc \sin u + c = Arc \sin x^3 + c$$

$$5) I = \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \rightarrow I = \int \frac{dt}{t(1+t)}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{t(A+B)+A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} t(t+1) = t(t+1) \\ t(A+B)+A \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + c = x - \ln|1+e^x| + c$$

$$6) I = \int \sec x dx$$

توچ ! if $f(x) = \ln(\sec x + \tan x) \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) \Rightarrow f'(x) = \sec x$

$$\Rightarrow I = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

روش دیگر : $\sec x = u \rightarrow \cos x = \frac{1}{u} \Rightarrow -\sin x dx = \frac{-du}{u^2} \Rightarrow dx = \frac{du}{u^2 \sin x} = \frac{du}{u^2 \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}} = \frac{du}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} = dx$

$$I = \int \sec x dx = \int \frac{u du}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u + c = \cosh^{-1}(\sec x) + c$$

روش انتگرال گیری از کسر های گویا

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}$$

انتگرال کسری ساده نوع اول

$$I = \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \begin{cases} \frac{1}{n} \ln |ax+b| + c & n = 1 \\ \frac{1}{a(1-n)} (ax+b)^{1-n} + c & n \neq 1 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{Px + q}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \quad (b^2 - 4ac < 0)$$

$$I = \int \frac{\frac{p}{2a}(2ax + b) - \frac{Pb}{2a} + q}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{P}{2a} \int \frac{2ax - b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \int \frac{q - \frac{Pb}{2a}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

$$J = \int \frac{q - \frac{Pb}{2a}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = q - \frac{Pb}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \xrightarrow{\substack{\frac{ax^2 + bx + c \equiv (x+A)^2 + B^2}{B} \\ \frac{x+A}{B} = \tan t}}$$

سوال: انتگرال $I = \int \frac{xdx}{x^2 + 2x + 3}$ را حساب کنید؟

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2}(2x + x) - 1}{(x+1)^2 + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x+1)^2 + 2} dx - \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} \xrightarrow{\substack{\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \tan t \\ dx = \sqrt{2}(1+\tan^2 t)dt}} \\ &= \frac{1}{2} \ln |(x+1)^2 + 2| - \int \frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 t)dt}{2(1+\tan^2 t)} = \frac{1}{2} \ln |(x+1)^2 + 2| - \frac{\sqrt{2}}{2} t + c \\ &= \frac{1}{2} \ln |(x+1)^2 + 2| - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc} \tan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c \end{aligned}$$

قضیه اویلر

هر چند جمله‌ای مانند $g(x) = (x-a)^m$ قابل تجزیه به عبارت درجه اول $(x-a)$ و عبارت درجه دوم فاقد ریشه $(ax^2 + bx + c)^m$ می باشد که از اولی ریشه‌های حقیقی و از دومی ریشه‌های مختلط مزدوج نتیجه می شود.

$$g(x) = (x-a)^m g_1(x)$$

$$= \prod_{i=1}^m (x-a_i)^{n_i} \prod_{i=m+1}^n (a_i x^2 + b_i x + c_i)^{n_i}$$

مثال:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x+1) = (x-1)(x^2+1)$$

$$(x^6 - 1)^2 = ((x^3)^2 - 1)^2 = ((x^3 - 1)(x^3 + 1))^2 = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

قضیه: فرض کنیم $x = a$ ریشه مکرر مرتبه n باشد، (یعنی $g(x) = (x - a)^n g_1(x)$) در این صورت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^n} + \frac{A_2}{(x - a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)} + \frac{f_n(x)}{g_1(x)}$$

اثبات: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - a)^n g_1(x)} = \frac{A_1 g_1(x) + f(x) - A_1 g_1(x)}{(x - a)^n g_1(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^n} + \frac{f(x) - A_1 g_1(x)}{(x - a)^n g_1(x)}$

پس $\forall A \in \mathbb{R}$ برقرار است.

مجدداً A_1 را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(x) - A_1 g_1(x)$ بخش پذیر باشد. یعنی

$$f(a) - A_1 g_1(a) = 0 \longrightarrow A_1 = \frac{f(a)}{g_1(a)}$$

$$\longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^n} + \frac{(x - a)f_1(x)}{(x - a)^n g_1(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^n} + \frac{f_1(x)}{(x - a)^{n-1} g_1(x)}$$

$$f(x) - A_1 g_1(x) = (x - a)f_1(x)$$

با تکرار این فرآیند برای تابع $\frac{f_1(x)}{(x - a)^{n-1} g_1(x)}$ به این نتیجه خواهیم رسید.

قضیه: فرض کنید $\frac{f(x)}{g(x)}$ کسر (ریشه حقیقی ندارد) $b^2 - 4ac < 0$ که در آن $g(x) = (ax^2 + bx + c)^m g_1(x)$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{f_n(x)}{g_n(x)}$$

تجزیه کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$

برای تجزیه کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ با استفاده از سه قضیه قبل کسر را به صورت عوامل

تجزیه می‌کنیم. سپس با متعدد قرار دادن طرف اول و طرف دوم ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم. توجه داشته باشید که هر کدام از اجزای تجزیه به شکل انتگرال کسری ساده نوع اول و نوع دوم می‌باشند که نحوه محاسبه آن بیان شده است.

$$\text{مثال: } I = \int \frac{2x dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \longrightarrow Ax^2 + Bx - Ax - B + Cx^2 + C \equiv 2x$$

$$x^2(A+C) + x(B-A) + C - B = 2x \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B-A=2 \\ C-B=0 \end{cases} \Rightarrow C=1, A=-1, B=1$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2+1} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + A \operatorname{rc} \tan x + c
\end{aligned}$$

تغییر متغیر های اویلر

$$I = \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد، آنگاه تغییر متغیر $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$ را اعمال می کنیم.

اگر یک ریشه حقیقی داشته باشد ($ax^2 + bx + c = 0$)، آنگاه تغییر متغیر $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ را اعمال خواهیم کرد.

مثال :

$$1) I = \int \cos x (f(\sin x)) dx$$

$$\sin x = t \longrightarrow dt = \cos x dx$$

$$I = \int f(t) dt$$

$$2) I = \int \sin x (f(\cos x)) dx$$

$$\cos x = t \longrightarrow dt = -\sin x dx$$

$$I = - \int f(t) dt$$

$$3) I = \int f(\tan x) dx$$

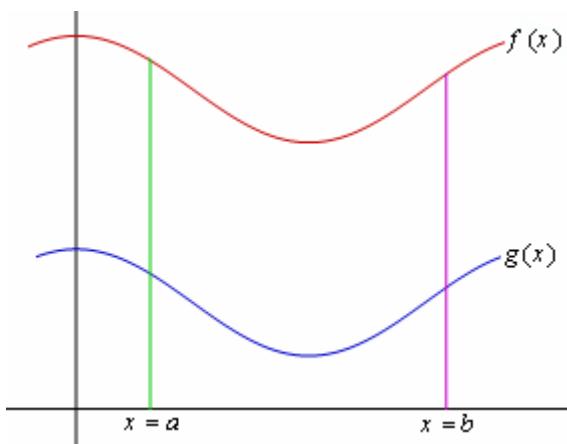
$$\tan x = t \longrightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$$

$$I = \int \frac{f(t) dt}{1+t^2}$$

$$4) I = \int f(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$$

$$\xrightarrow{\tan x = t} I = \int f\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

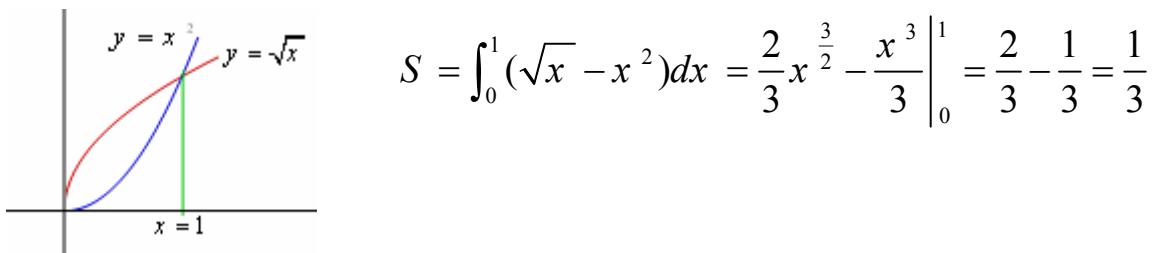
کاربرد انتگرال



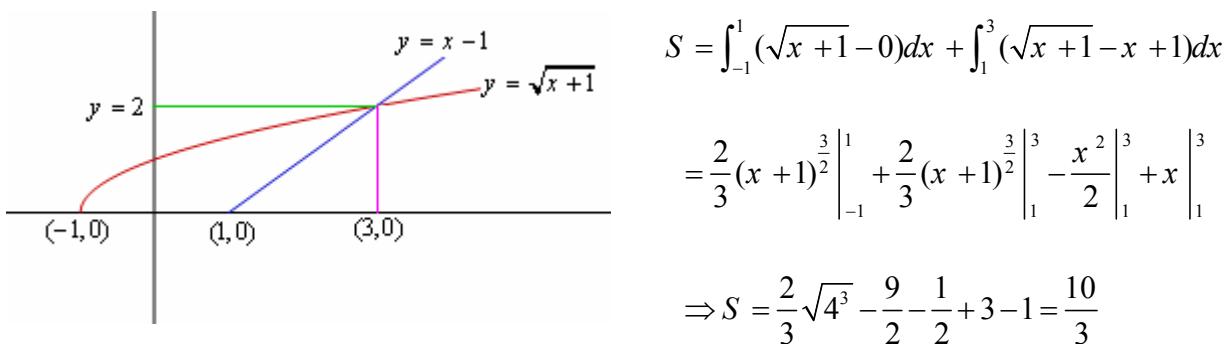
$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x) - 0| dx \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

برای محاسبه مساحت دو منحنی در فاصله (a, b) باید توجه داشت که مرزها را مشخص می‌کنند، در طول کل فاصله نباید تغییر کنند، اگر در نقطه‌ای مانند c ($a < c < b$) یک یا دو مرز تغییر کردند، باید در نقطه c ، انتگرال را تقسیم کرد.

سوال: مساحت محصور به منحنی‌های $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ و خط $x = 1$ و محور x را بدست آورید؟



سوال: ناحیه محدود به منحنی $y = g(x) = x - 1$ و خط $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ را حساب کنید؟



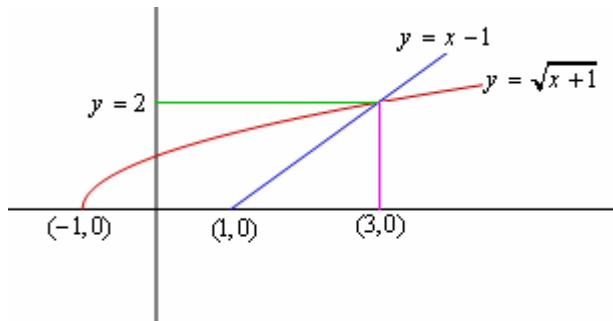
$$S = \int_{-1}^1 (\sqrt{x+1} - 0) dx + \int_1^3 (\sqrt{x+1} - x + 1) dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + x \Big|_1^3$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{10}{3}$$

در محاسبه مساحت بطور معمول تابع را بر حسب x در نظر می‌گیریم و مساحت را براساس تغییرات x بدست می‌آوریم و می‌توان مساحت را بر حسب تغییرات y نیز بدست آورد. به این صورت که $\int_a^b f(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy$ می‌باشد. دامنه تغییرات y را وقتی x از a تا b تغییر می‌کند، بدست می‌آوریم و تابع زیر انتگرال را بر حسب y می‌نویسیم، یعنی x تابعی از y خواهد بود.

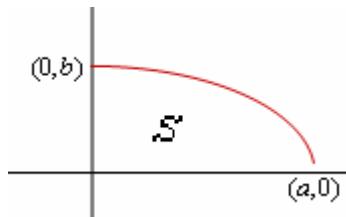
سوال: ناحیه محدود به منحنی $y = g(x) = x - 1$ و خط $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ و خط $y = 0$ را حساب کنید؟



$$\begin{aligned}y &= x - 1 \rightarrow x = y + 1 \\y &= \sqrt{x+1} \rightarrow x = y^2 - 1\end{aligned}$$

$$S = \int_0^2 (y + 1 - y^2 + 1) dy = \left(\frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{3}y^3 + y \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{3}$$

سوال: مساحت بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حساب کنید؟



$$x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$S = \int_0^a \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) dx$$

$$\frac{x}{a} = \sin t \rightarrow x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt \rightarrow \int (\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \int a^2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C$$

$$S = \frac{b}{a} \left(a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi ab}{4}$$

$$\text{مساحت بیضی} \rightarrow 4S = \pi ab$$

حجم

فرض کنیم S جسمی باشد که بین صفحات $x=a$ و $x=b$ قرار گرفته است، هم چنین فرض کنید (x_0) $A(x)$ مساحت مقطع این جسم با صفحه $x=x_0$ باشد، به طوری که $A(x)$ یک تابع انتگرال پذیر است. در این صورت مساحت این حجم

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad \text{برابر است با:}$$

سوال: حجم کره ای به شعاع r را حساب کنید؟

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

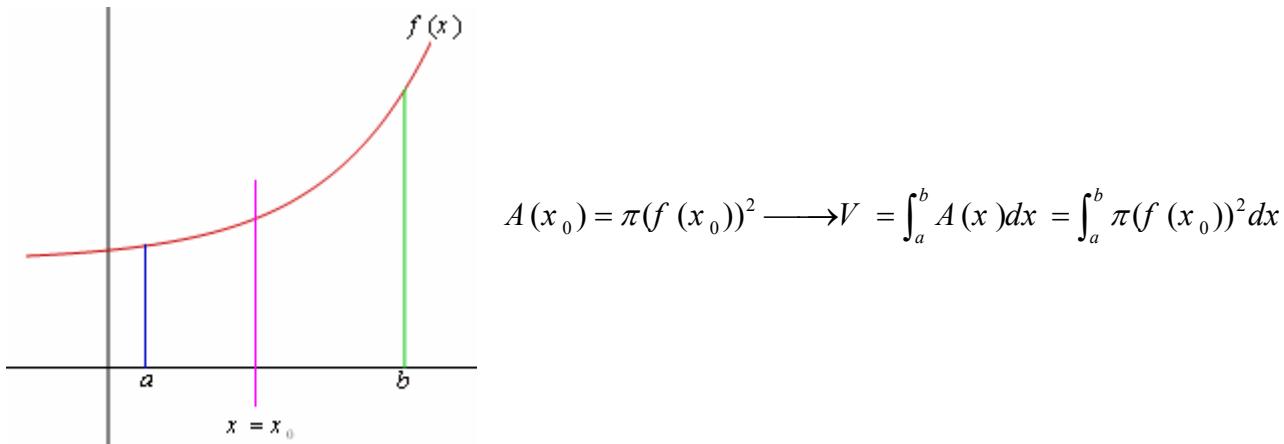
حال اگر $z = z_0$ دایره ای به صورت زیر بدست می آید:

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2 \longrightarrow A(z) = \pi(r^2 - z^2)$$

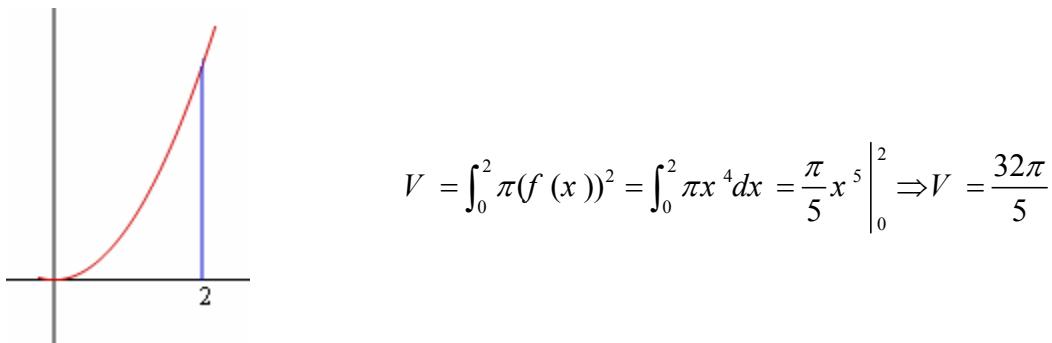
$$V = \int_{-r}^r A(z) dz = \int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz = \pi\left(r^2 z - \frac{1}{3}z^3\right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

حجم جسم دورانی

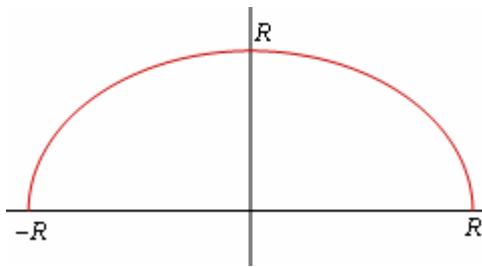
فرض کنید منحنی $y = f(x)$ حول محور x ها دوران می یابد، اگر X را در فاصله (a, b) در نظر بگیریم، جسم حاصل یک شکل سه بعدی است که اگر آن را با صفحه $x = x_0$ قطع دهیم، سطح مقطع آن محل قطع صفحه با شکل یک دایره می باشد که شعاع دایره (x_0) است.



سوال: حجم جسم با ضابطه $y = f(x) = x^2$ را در فاصله $0 \leq x \leq 2$ را با محور x ها دوران یافته را بیابید؟



سوال: حجم کره ای به شعاع r را حساب کنید؟

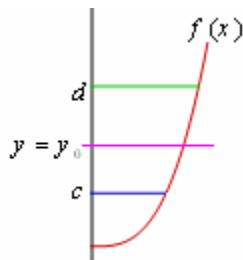


$$x^2 + y^2 = R^2 \longrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$A(x) = \pi(R^2 - x^2)$$

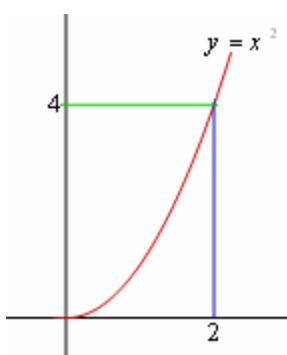
$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

اگر تابع $f(x)$ حول محور y ها دوران یابد، مثل حالت قبل جسمی سه بعدی به وجود خواهد آمد که در سطح آن با $y = y_0$ دایره ای است، به شعاع $(y_0)^{-1}(f)$ یعنی برای محاسبه این حجم باید تابع را بر حسب y نوشت، یعنی $x = f^{-1}(y)$ و سپس حدود تغییرات y را بدست آوریم، زیرا با تغییر (y_0) جسم مذکور حجمش به طور کامل جارو خواهد شد.



$$V = \int_c^d \pi(f^{-1}(y))^2 dy$$

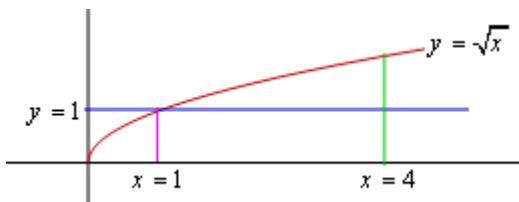
سوال: تابع $y = x^2$ را حول محور y ها دوران می دهیم، وقتی $x < 0$ می باشد، حجم حاصل را بیابید؟



$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$

$$V = \int_0^4 \pi y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$

سوال: حجم جسمی دورانی را از دوران ناحیه محدود به $y = \sqrt{x}$ و خطوط $y = 1$ و $x = 4$ حول خط $x = 1$ به وجود می آید را حساب کنید؟

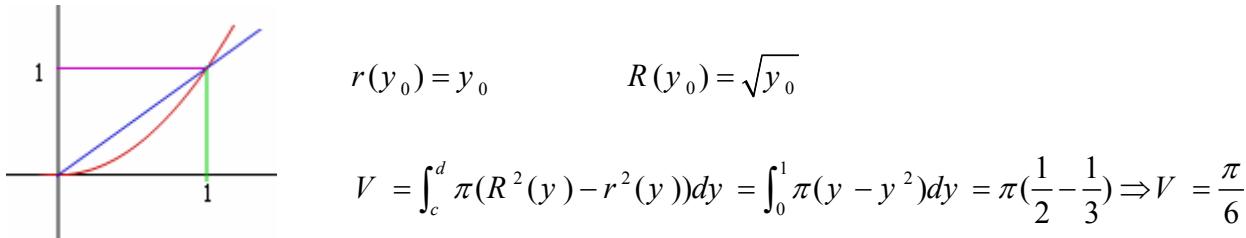


شعاع : $\sqrt{x_0} - 1$

$$A(x_0) = \pi(\sqrt{x_0} - 1)^2$$

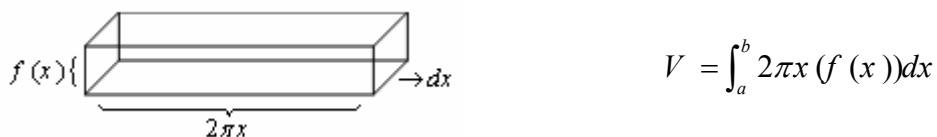
$$\int_1^4 \pi(x + 1 - 2\sqrt{x}) dx = \pi(\frac{1}{2}4^2 + 4 - 2(\frac{2}{3})\sqrt{4^3}) - (\frac{1}{2} + 1 - 2(\frac{2}{3})) = \pi(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3}) = \frac{7\pi}{6}$$

سوال: مساحت محدود به $y = f(x) = x^2$ و $y > 0$ این مساحت را حول محور y ها دوران دهیم، حجم حاصل از این دوران را بدست آورید؟



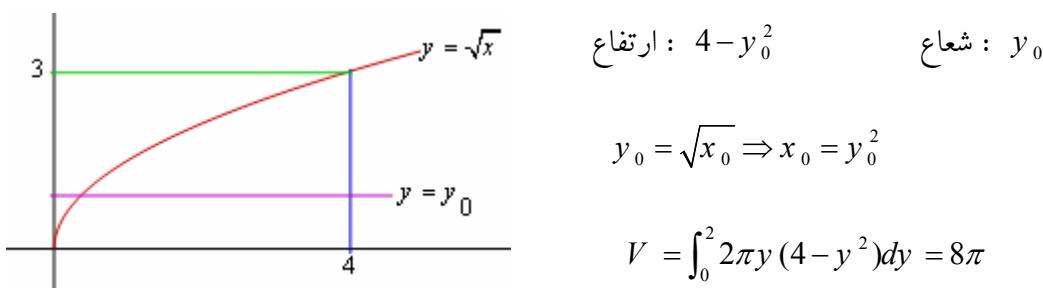
روش پوسته های استوانه ای

اگر نوار های مستطیلی تقریب زننده، ناحیه ای که حول آن دوران می یابد، با آن محور موازی باشد، اجسام حاصل به شکل پوسته های استوانه ای خواهد بود، در این صورت حجم حاصل از دوران تابع $f(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

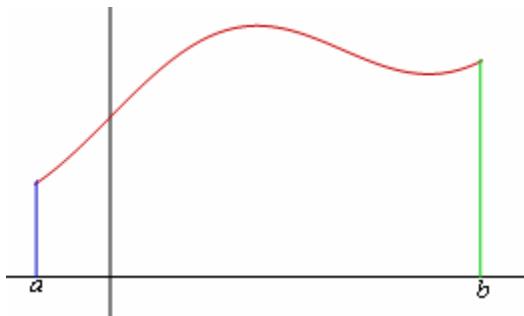


که در آن x شعاع داخلی استوانه و $f(x)$ ارتفاع خواهد بود.

سوال: اگر $y = f(x) = \sqrt{x}$ باشد و حول محور x ها دوران دهیم، حجم جسم حاصل را حساب کنید، وقتی که $0 \leq x \leq 4$ باشد؟



طول منحنی واقع در صفحه



$$c(x_{i-1}, x_i) \longrightarrow (f(x_{i-1}), f(x_i))$$

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{رابطه ۱}$$

$$\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i) \Rightarrow f'(c_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

\ ۱: طبق رابطه ۱ $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \cdot \Delta x \longrightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int_c^d \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$

محاسبه طول منحنی های پارامتری

اگر باشد، می شود ثابت کرد که:

$$\text{if } a \leq t \leq b \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

سوال: محیط دایره ای به شعاع r را بدست آورید؟

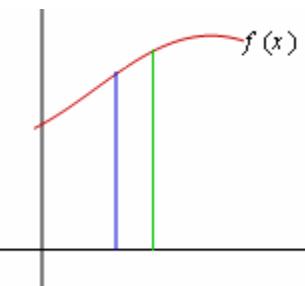
$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dt \Rightarrow \frac{L}{4} = \frac{r\pi}{2}$$

$$L = 4\left(\frac{r\pi}{2}\right) \Rightarrow L = 2\pi r$$

مساحت رویه های دورانی

اگر ds را جز طول نوار و ρ را شعاع فرض کنیم، آنگاه



$$y = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

$$S = \int_a^b 2\pi \rho ds \Rightarrow S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$$

سوال: مساحت رویه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را وقتی حول محور X ها دوران می دهیم، در بازه $0 \leq x \leq 4$ بدست آوردید؟

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\rho = f(x) = \sqrt{x}$$

$$S = \int_0^4 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \pi \int_0^4 \sqrt{1+4x} dx = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (1+4x)^{\frac{1+1}{2}} \Big|_0^4 = \frac{\pi}{6} (1-17\sqrt{17})$$

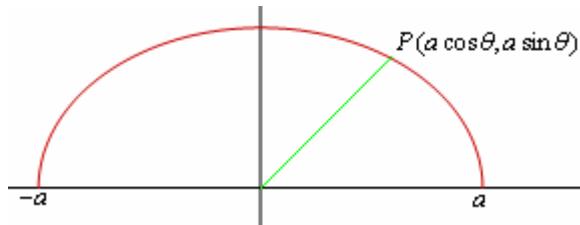
اگر معادله منحنی به شکل پارامتری باشد، آنگاه

$$x = x_{(t)} \quad y = y_{(t)}$$

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad a \leq x \leq b$$

$$S = \int 2\pi \rho ds = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi \rho_{(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

سوال: نیمه بالای دایره $x^2 + y^2 = a^2$ حول محور X ها دوران می دهیم، مساحت رویه بدست آمده را حساب کنید؟



$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\rho(\theta) = a \sin \theta$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} d\theta = \sqrt{a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = a d\theta$$

$$S = \int_0^\pi 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi a^2$$

محاسبه مساحت زیر سطح منحنی وقتی معادلات پارامتری داده شده، برابر است:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dy$$

$$x = x_{(t)} \longrightarrow dx = x'_{(t)} dt$$

$$\longrightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} y_{(t)} x'_{(t)} dt$$

$$y = y_{(t)}$$

سوال: مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حساب کنید؟

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$dx = -a \sin \theta \, d\theta$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta = -ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1-\cos 2\theta}{2}) d\theta = -ab \frac{\pi}{4}$$

همانطور که ملاحظه می کنید مساحت منفی شده است پس با توجه به این که $\cos \theta$ در ربع اول کاهشی است. خواهیم داشت:

$$x_i = a \cos \theta_i \quad \Delta x_i = dx_i = a(\cos \theta_i - \cos \theta_{i-1}) \quad d\theta \approx \theta_i - \theta_{i-1}$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta = -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\frac{1-\cos 2\theta}{2}) d\theta = ab \frac{\pi}{4}$$

بدست آوردن حجم از طریق معادله پارامتری

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \int_a^b \pi y^2 dx \quad V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2(t) x'(t) dt$$

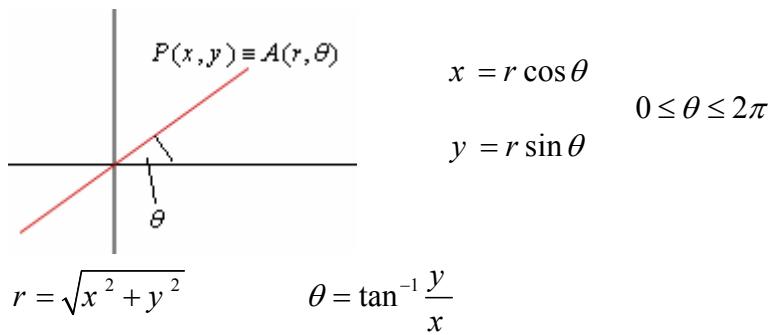
سوال: حجم حاصل از دوران $y = a \sin^3 t$ و $x = a \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq \pi$) را حول محور x ها بدست آورید؟

$$dx = -3a \sin t \cos^2 t dt$$

$$y^2(t) = a^2 \sin^6 t$$

$$V = \int_{\pi}^0 (-3a^3) \pi \sin^7 t \cos^2 t dt = -3a^3 \pi \int_{\pi}^0 \sin^7 t \cos^2 t dt$$

مختصات قطبی



سؤال: شکل قطبی $y = x$ را بنویسید؟

$$y = f(x) = x$$

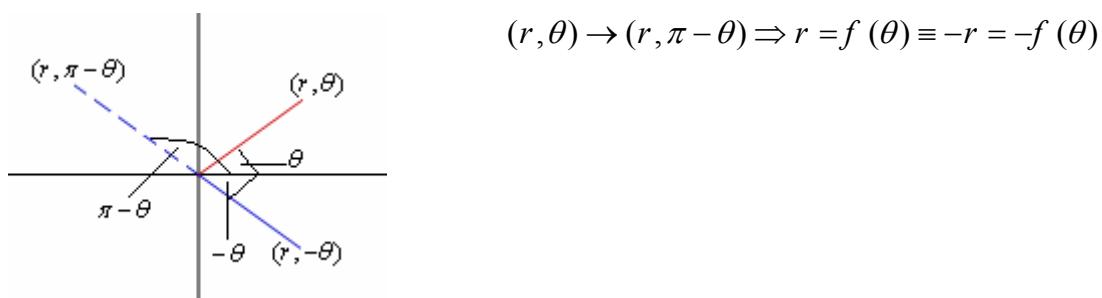
$$r = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{4}, r > 0 \quad \theta = \frac{5\pi}{4}, r > 0$$

سؤال: شکل قطبی $x^2 + y^2 = a^2$ را بنویسید؟ (0 ≤ θ ≤ 2π)

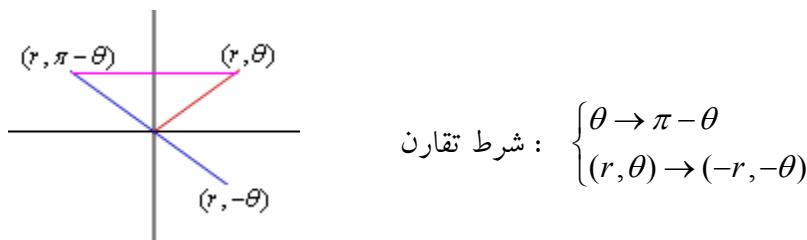
تقارن

تقارن نسبت به محور x ها

تابع $r = f(\theta)$ نسبت به محور X ها تقارن دارد که اگر θ را به $-\theta$ - تغییر دهیم، شکل تغییر نکند.



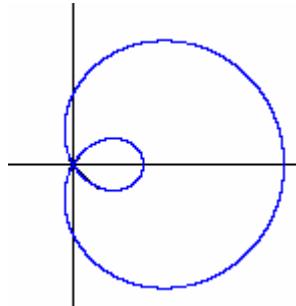
تقارن نسبت به محور y ها



اکسترمم های نسبی r

معادله $r = f(\theta)$ را در نظر بگیرید که $f(\theta)$ یک تابع مشتق پذیر است با استفاده از روش های مشتق گیری و اکسترمم می توان اکسترمم های نسبی آن را تعیین کرد ولی چون فاصله نقطه (r, θ) تا مبدأ که همان قطب است برابر است. ممکن است ماکزیمم و می نیم های نسبی r نقاطی را بدست بدھند که فاصله آن ها تا قطب ماکزیمم نسبی $|r|$ باشد.

$$r = f(\theta) = 1 + 2 \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$



$$\frac{dr}{d\theta} = -2 \sin \theta = 0 \quad \theta = 0, \pi$$

$$f(0) = 1 + 2 = 3 \quad f(\pi) = -1$$

شیب و خطوط مماس

برای یافتن شیب یک خط مماس بر یک نمودار قطبی تابع مشتق پذیر $r = f(\theta)$ را در نظر می گیریم، هرگاه α زاویه از محور ها قطبی به خط مماس در نقطه (r, θ) باشد، آنگاه $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$. پس

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ x &= r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y &= r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta} = \tan \theta$$

قضیه (شیب یک شکل قطبی): هرگاه f یک تابع مشتق پذیر از θ باشد، آنگاه شیب خط مماس بر نمودار (r, θ) در

نقطه (r, θ) برابر است با: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ به شرط آن که $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ باشد.

۱- جواب های معادله $\frac{dy}{d\theta} = 0$ ، مماس های افقی را بدست می دهد، به شرط اینکه $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ باشد.

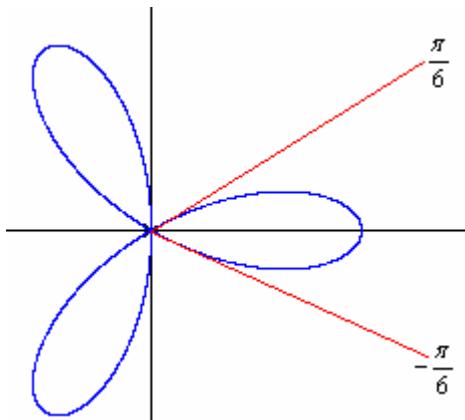
۲- جواب های معادله $\frac{dx}{d\theta} = 0$ مماس های قائم را بدست می دهد، به شرط آن که $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ باشد.

۳- اگر $\frac{dy}{d\theta} = 0$ و $\frac{dx}{d\theta} = 0$ باشند، در مورد مماس ها نتیجه ای نمی توان گرفت.

قضیه (خطوط مماس در قطب): اگر $f'(\alpha) \neq 0$ باشد، آنگاه خط $\theta = \alpha$ در قطب بر نمودار مماس است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\alpha)\sin\alpha + f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha - f(\alpha)\sin\alpha} = \tan\alpha$$

سوال: نمودار $r = 3\cos 3\theta$ را رسم کنید. ($0 \leq \theta < 2\pi$)

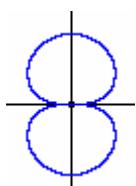


$$\cos 3\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
r	3	0	-2.25	-3

نکته: به طور کلی $\begin{cases} r = a \cos n\theta \\ r = a \sin n\theta \end{cases}$ یک n پر است.

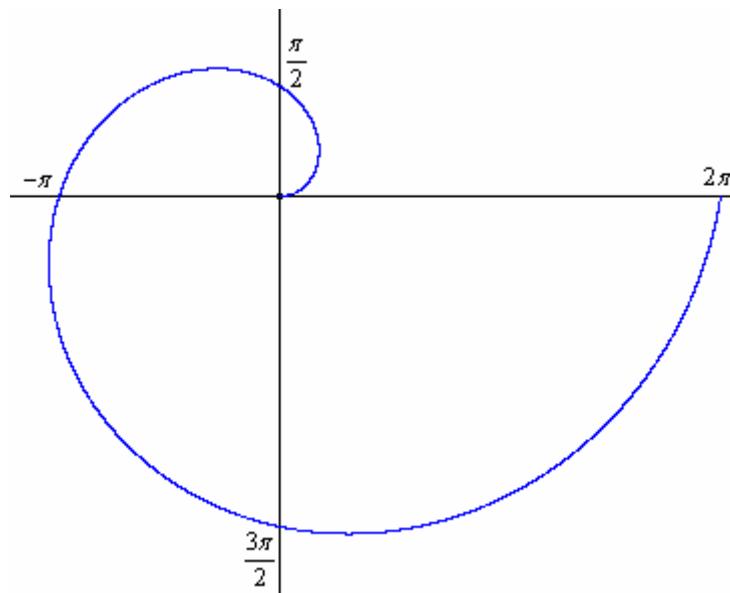
مثال : $r = \sqrt{|\sin \theta|}$



برای رسم نمودار $r = f(\theta)$ از طریق نقطه یابی خطوط $\theta = \theta_0$ را برای مقادیر $\theta = \theta_0$ متعلق به دامنه $f(\theta)$ رسم می‌کنیم. این خطوط، خطوطی هستند که از قطب می‌گذرند و با محور قطب زاویه θ_0 را می‌سازند. حال مقادیر $f(\theta_0)$ را بدست می‌آوریم و به اندازه مقدار r_0 روی خط $\theta = \theta_0$ از قطب O انتخاب می‌کنیم. حال نقاط بدست آمده را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم، شکل تقریبی ظاهر می‌شود.

پیچ ارشمیدس

$$r = \theta \longrightarrow r = a\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



تبديل قطبي به دكارتى

$$r = f(\theta) \rightarrow y = \sin \theta \cdot f(\theta)$$

مساحت در مختصات قطب

ناحیه S محدود به منحنی $r = f(\theta)$ و $\alpha \leq \theta \leq \beta$ را در نظر بگیرید، برای به دست آوردن مساحت ناحیه S می‌توان زاویه $\alpha - \beta$ را به n قسمت افراز کرد. اگر فرض کنیم، تعداد این افرازها تا حد معقولی زیاد است، مساحت قطاع i ام برابر خواهد بود با $\frac{1}{2} r_i^2 \Delta \theta_i$ که در آن r_i مقداری است بین $f(\theta_{i-1})$ و $f(\theta_i)$. اگر تمامی افرازها را با هم دیگر جمع بزنیم و n را به سمت ∞ میل دهیم مقدار واقعی مساحت به صورت زیر خواهد بود:

$$S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \theta_i \longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \theta_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

سوال: مساحت محدود به منحنی $r = 3 \cos 3\theta$ را بدست آورید؟

$$S = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 9 \cos^2 3\theta d\theta = \frac{9\pi}{4}$$

طول منحنی در مختصات قطبی

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta \longrightarrow dx = (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta) d\theta \\ y &= f(\theta) \sin \theta \longrightarrow dy = (f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)} d\theta$$

سوال: طول دور اول پیچ ارشمیدس را بدست آورید؟

$$r = a\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 \theta^2 \\ r' &= a \rightarrow r'^2 = a^2 \end{aligned} \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \theta + a^2} d\theta = |a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{8|a|\pi}{3}$$

حجم منحنی در مختصات قطبی

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \longrightarrow V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt$$

$$y(\theta) = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$$

$$x(\theta) = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \longrightarrow x'(\theta) = (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta) d\theta$$

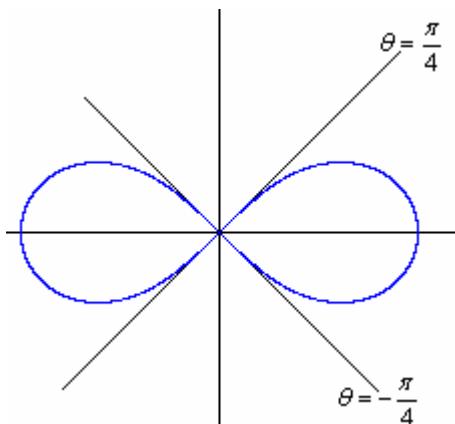
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) \sin^2 \theta (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta) d\theta$$

مساحت رویه حاصل از دوران حول محور قطبی

$$S = \int 2\pi \rho ds \quad ds = \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)} d\theta$$

$$\Rightarrow S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi f(\theta) \sin \theta \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)} d\theta$$

سوال: مساحت رویه ای که از دوران پر سمت راست پروانه حول محور y ها را بدست آورید؟



$$\rho = x = r \cos \theta = \sqrt{2a^2 \cos 2\theta} \cos \theta$$

$$ds = \sqrt{2a^2 \cos 2\theta + r'^2} d\theta$$

$$2\pi\rho ds = 2\pi \cos \theta \sqrt{r^2 dr^2 + r^4 dr^2} = 4\pi a^2 \cos \theta d\theta$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\pi a^2 \cos \theta d\theta = 4\pi a^2 \sqrt{2}$$

تمرینات فصل هشتم:

تمرین: مساحت محصور به نمودار $f(x) = x^2 + 2x + 3$ و دو خط $x = 0$ و $x = 2$ و محور X ها را بدست آورید؟

تمرین: مشتق گیری از انتگرال را اثبات کنید.

تمرین: محیط بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را بیابید؟

تمرین: حجم بیضی گون به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ را حساب کنید؟

تمرین: استوانه ای مستطیل (مقطع دایره) به شعاع R را در نظر بگیرید، صفحه ای از قطر قاعده آن می گزارد که با قاعده زاویه α می سازد، حجم قطعه بریده شده را تعیین کنید؟

تمرین: حجم مشترک دو استوانه به معادلات $x^2 + y^2 = r^2$ و $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ را تعیین کنید؟

تمرین: حجم محدود به صفحات $x = a$ و $y = 0$ و $z = 0$ و سطوح استوانه ای $x^2 + y^2 = 2Px$ را محاسبه کنید؟ ($P > 0$)

تمرین: انتگرال های زیر را حساب کنید؟

$$1) \int 3^x e^x dx$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$3) \int e^{x^2 + 4x + 3} (x + 2) dx$$

$$4) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$5) \int \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$6) \int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)}$$

$$7) \int (Arc \cos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) dx$$

$$8) \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$$