

(۱) برخی از مفاهیم مهم که ممکن است در تست ها مطرح گردد:

- گروه خونی از مقیاس اسمی پیروی می کند.
- طول و وزن با مقیاس نسبتی اندازه گیری می شوند.
- در تقسیم بندی رنگ چشم از کدام مقیاس استفاده می شود؟
- فرآیند انتساب عدد به یک عنصر چه نامیده می شود؟ اندازه گیری
- در چه شیوه ای از به دست آوردن داده ها، برخی عامل های تحت بررسی را کنترل می کنیم؟.....
- در نمودار میله ای روی محور افقی کدام مقادیر قرار داده می شود؟ مقادیر مرکز رده ها
- به کمک کدام نمودار می توان رابطه بین دو متغیر را تشخیص داد؟
- برای به دست آوردن متوسط آهنگ های رشد از چه میانگینی استفاده می کنیم؟ میانگین هندسی
- کوچک شدن مقیاس شبکه بندی دقت کدام یک از اندازه های توزیع فضایی را بیشتر می کند؟.....
- برای تعیین محل یک درمانگاه در یک شهرستان از اندازه توزیع فضایی استفاده می شود؟
- به جوش آمدن آب و دمای هوا در یک محل به ترتیب چه نوع پدیده هایی هستند؟.....
- از روی کدام نمودار می توانیم داده های اصلی را بازسازی کنیم؟ نمودار ساقه و برگ
- مشکل انحراف معیار به عنوان یک اندازه پراکندگی چیست؟ وجود قدر مطلق
- متغیرهایی که از راه اندازه گیری به دست می آیند چه نامیده می شوند؟.....
- اگر برای دو پیشامد A, B داشته باشیم: $P(A \cap B) = 0$ آنگاه دو پیشامد را ناسازگار می نامیم.
- اگر برای دو پیشامد A, B داشته باشیم: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ آنگاه دو پیشامد را مستقل از هم می نامیم.
- برای توزیع های با چولگی منفی از چه تبدیل هایی استفاده می شود؟.....
- آمار به تجزیه و تحلیل عنصر می پردازد.
- واریانس عدد ثابت برابر صفر می باشد.
- امید ریاضی عدد ثابت c برابر با c است.
- اگر جدول توزیع فراوانی شامل تمام داده ها نباشد در هر رده از کران پایینی نیم واحد کم و به کران بالایی نیم واحد اضافه می کنیم. این عمل را تصحیح پیوستگی می نامیم.
- یک رشته از اعداد را در نظر بگیرید. حال آن ها را به ترتیب افزایشی یا کاهشی مرتب کنید. داده هایی که در دوسر این دنباله قرار می گیرند (یعنی کوچکترین و بزرگترین داده ها) را کرانگین های این مجموعه می نامیم.
- توزیع نرمال یا توزیع متقارن توزیعی است که در آن مد، میانه و میانگین برابر است.

(۲) به کمک نمودار ساقه و برگ $9 \ 9 \ 8 \ 7 \ 0$ | ۶ داده های اصلی را بازایی کنید.
پاسخ: ۶۰ ، ۶۷ ، ۶۸ ، ۶۹ ، ۶۹

(۳) فراوانی نسبی داده ای ۳۵٪ می باشد؛ اندازه زاویه مرکزی قطاع مربوط به آن را در نمودار دایره ای بیابید.

$$a_i = \frac{f_i}{n} \times 360 = 0.35 \times 360 = 126$$

پاسخ: ۱۲۶

(۴) رده ۲۴/۹ - ۲۱ دارای فراوانی درصد (منظور همان درصد فراوانی نسبی است) ۳۱/۲۵ و $n = 80$ می باشد. فراوانی رده را بیابید.

$$\text{پاسخ: درصد فراوانی نسبی} = \frac{f_i}{n} \times 100 = 100$$

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{f_i}{80} \times 100 = 31.25 \rightarrow f_i = \frac{31.25 \times 80}{100} = 25$$

(۵) اگر سرعت اتومبیل در ساعت اول ۴۸ کیلومتر بر ساعت و در ساعت دوم ۸۰ کیلومتر بر ساعت باشد، آنگاه میانگین سرعت چقدر است؟
با توجه به اینکه مقیاس اندازه گیری ترکیبی است بایستی از میانگین هارمونیک (همساز) استفاده کنیم. بنابراین:

$$X_H = \frac{n}{\sum_i \frac{1}{x_i}} = \frac{2}{\frac{1}{48} + \frac{1}{80}} = \frac{2(80 \times 48)}{128} = 60 \text{ km/h}$$

(۶) اگر $\sum x_i^2 = 1203.97$ و $\sum x_i = 74.1$ و $n = 5$ باشد؛ مقدار واریانس داده ها را بیابید.
پاسخ: از روش کوتاه برای محاسبه واریانس استفاده می کنیم:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - [(\sum x_i)^2 / n]}{n - 1} = \frac{1203.97 - (74.1)^2 / 5}{4} = 26.45$$

(۷) اگر میانه داده ها برابر با $\tilde{x} = 28$ و میانگین برابر با $\bar{x} = 33$ و واریانس برابر با $s_x^2 = 25$ باشد، ضریب چولگی پیرسون SK_p توزیع داده ها را حساب کنید.

پاسخ: چون واریانس برابر ۲۵ می باشد، لذا انحراف معیار مساوی با ۵ است و از فرمول ضریب چولگی پیرسون خواهیم داشت:

$$SK_p = \frac{\bar{x} - M}{s} \simeq \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s} = \frac{3 \times (33 - 28)}{5} = 3$$

(۸) اگر مقدار چارک اول برابر ۱۵ و مقدار چارک سوم برابر با ۶۵ باشد، مقدار ضریب تغییر چارکی چقدر است؟
پاسخ:

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{65 - 15}{65 + 15} \times 100 = 62.5$$

(۹) اگر مقدار چارک اول برابر ۲۲ و مقدار چارک سوم برابر با ۸۶ باشد، مقدار انحراف چارکی چقدر است؟
پاسخ:

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{86 - 22}{2} = 32$$

(۱۰) برای داده های زیر دامنه تغییرات، مد، میانه، چارک اول، سوم، میانگین، واریانس، انحراف معیار را محاسبه کنید.

$$1, 1/2, 1/2, 2, 5, 5, 3, 5/1, 2/2, 6, 9, 4/1, 1/2, 3$$

پاسخ: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم:

$$1, 1/2, 1/2, 1/2, 2, 2/2, 3, 3, 4/1, 5, 5, 5/1, 6, 9$$

$$\bullet R = x_{max} - x_{min} = 9 - 1 = 8$$

$$\bullet M = 1/2$$

$$\bullet \tilde{x} = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$\bullet Q_a = x_a \times n \rightarrow Q_1 = x_1 \times 14 = x_{3.5} = \frac{1/2 + 1/2}{2} = 1/2$$

$$\bullet Q_3 = x_3 \times 14 = x_{10.5} = \frac{5+5}{2} = 5$$

$$\bullet \bar{x} = \frac{1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 2 + 2/2 + 3 + 3 + 4/1 + 5 + 5 + 5/1 + 6 + 9}{14} = 3.5$$

برای محاسبه واریانس از روش کوتاه استفاده می کنیم: لذا

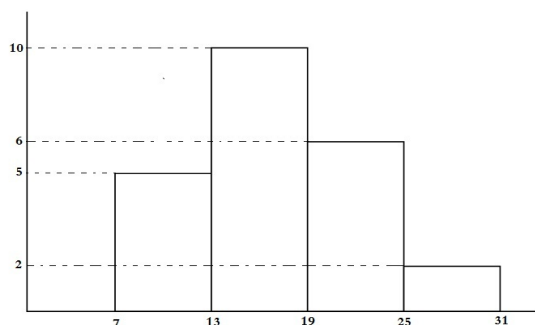
$$\Sigma x_i^2 = (1^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 + 2^2 + (2/2)^2 + 3^2 + 3^2 + (4/1)^2 + 5^2 + 5^2 + (5/1)^2 + 6^2 + 9^2) = 241/98$$

$$(\Sigma x_i)^2/n = \frac{(49)^2}{14} = 171/5$$

$$\bullet \quad s^2 = \frac{\Sigma x_i^2 - [(\Sigma x_i)^2/n]}{n-1} = \frac{241/98 - 171/5}{13} = 5/38, \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5/38} = 2/32$$

(۱۱)

اگر نمودار روبرو بافت نگار تعداد داده ها باشند، به هر کدام از سوالات زیر پاسخ دهید.
الف) فراوانی تجمعی دسته چهارم را بیابید.
ب) میانگین و میانه را حساب کنید



حدود رده ها	7-13	13-19	19-25	25-31
f _i	5	10	6	2

پاسخ: ابتدا از روی نمودار بافت نگار جدول توزیع داده ها را استخراج می کنیم؛ می دانیم روی محور افقی حدود رده ها و روی محور عمودی فراوانی مطلق را داریم لذا جدول روبرو را خواهیم داشت:
فراوانی دسته چهارم برابر است با:

$$F_4 = 5 + 10 + 6 + 2 = 23$$

برای محاسبه میانگین بایستی نماینده هر رده محاسبه شود لذا خواهیم داشت:

$$m_1 = \frac{7+13}{2} = 10, \quad m_2 = \frac{13+19}{2} = 16, \quad m_3 = \frac{19+25}{2} = 22, \quad m_4 = \frac{25+31}{2} = 28$$

بنابراین از فرمول محاسبه میانگین برای جدول فراوانی خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i m_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \rightarrow \bar{x} = \frac{10 \times 5 + 16 \times 10 + 22 \times 6 + 28 \times 2}{5 + 10 + 6 + 2} = \frac{398}{23} = 17/30$$

برای محاسبه میانه ابتدا $\frac{23}{2} = 11/5$ را با فراوانی های تجمعی رده ها مقایسه می کنیم.

حدود رده ها	7-13	13-19	19-25	25-31
f _i	5	10	6	2
F _i	5	15	21	23

مشاهده می کنیم فراوانی تجمعی رده دوم بیشتر از نصف داده ها است لذا میانه در این رده واقع شده است. بنابراین از فرمول:

$$\tilde{x} = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{(i-1)}}{f_i} \times C \rightarrow \tilde{x} = 13 + \frac{11/5 - 5}{10} \times 6 = 16/9$$

(۱۲)

میانگین داده های جدول فراوانی روبرو را بیابید.
پاسخ:

نماینده رده	2	6	10	14
f _i	3	5	2	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i m_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \rightarrow \bar{x} = \frac{2 \times 3 + 6 \times 5 + 10 \times 2 + 14 \times 1}{3 + 5 + 2 + 1} = \frac{70}{11} = 6/36$$

(۱۳)

میانه داده ها را در جدول فراوانی روبرو بیابید.

حدود رده	20-24	25-29	30-34	35-39
f _i	12	22	10	16

پاسخ: برای محاسبه میانه ابتدا $\frac{60}{2} = 30$ را با فراوانی های تجمعی رده ها مقایسه می کنیم.

$$F_1 = 12, \quad F_2 = 34, \quad F_3 = 44, \quad F_4 = 60$$

مشاهده می کنیم فراوانی تجمعی رده دوم بیشتر از نصف داده ها است لذا میانه در این رده واقع شده است. بنابراین از فرمول:

$$\tilde{x} = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{(i-1)}}{f_i} \times C \rightarrow \tilde{x} = 24/5 + \frac{30 - 12}{22} \times 5 = 28/59$$

توجه کنید چون جدول توزیع فراوانی شامل تمام داده ها نمی باشد در هر رده از کران پایینی نیم واحد کم و به کران بالایی نیم واحد اضافه می کنیم.

خود رده	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24
f_i	18	15	9	7	1

(۱۴) مقدار چارک سوم را در جدول فراوانی روبرو بیابید.

پاسخ: برای محاسبه چارک سوم ابتدا $\frac{3 \times n}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5$ را با فراوانی های تجمعی رده ها مقایسه می کنیم.

$$F_1 = 18, F_2 = 33, F_3 = 42, F_4 = 49, F_5 = 50$$

مشاهده می کنیم فراوانی تجمعی رده سوم بیشتر از $\frac{3}{4}$ داده ها است لذا چارک سوم در این رده واقع شده است. بنابراین از فرمول:

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3 \times n}{4} - F_{(i-1)}}{f_i} \times C \rightarrow Q_3 = 9.5 + \frac{37.5 - 33}{9} \times 5 = 12$$

توجه کنید چون جدول توزیع فراوانی شامل تمام داده ها نمی باشد در هر رده از کران پایینی نیم واحد کم و به کران بالایی نیم واحد اضافه می کنیم.

(۱۵) یک تاس سالم دو بار پرتاب می شود. مطلوبست احتمال اینکه مجموع شماره هایی که در دو بار پرتاب ظاهر می شوند، کمتر از ۵ یا بیشتر از ۱۰ باشد.

پاسخ: فضای نمونه عبارت است از:

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

پیشامد A را مجموع شماره های کمتر از ۵ و پیشامد B را مجموع شماره های بیشتر از ۱۰ در نظر می گیریم. لذا خواهیم داشت:

$$A = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1) \}, B = \{ (5,6), (6,5), (6,6) \}$$

بنابراین

$$A \cap B = \{ \} \rightarrow P(A \cap B) = 0 \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

(۱۶) سکه ای سالم را سه بار پرتاب می کنیم. اگر X تعداد شیرهای ظاهر شده در سه بار پرتاب باشد، $P(X=2)$ را بیابید.

در سه بار پرتاب یک سکه ممکن است هیچ شیری ظاهر نشود یا یک شیر یا دو شیر یا سه شیر ظاهر شود. اگر شیر را با T و خط را با H نمایش دهیم، فضای نمونه در حالت کلی عبارتست از:

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT \}$$

فقط حالتی را می خواهیم که دو بار شیر ظاهر شده است. در فضای نمونه زیر آنها خط کشیده ایم. بنابراین:

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

(۱۷) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد دو رقمی می توان نوشت:

پاسخ: صفر در جایگاه دهگان عدد نمی تواند قرار گیرد. لذا برای جایگاه دهگان ۴ حالت و برای جایگاه یکان ۵ حالت داریم. بنابراین اصل ضرب $4 \times 5 = 20$ عدد دو رقمی می توان ساخت.

(۱۸) به چند طریق ۳ دانشجوی سال اول و ۴ دانشجوی سال دوم می توانند بر روی ۷ صندلی در یک ردیف کنار هم قرار گیرند؟

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{4!3!} = \frac{5 \times 6 \times 7}{6} = 5 \times 7 = 35$$

(۱۹) به چند طریق می توان یک کمیته ۴ نفری از بین ۱۰ نفر انتخاب کرد؟

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{6!4!} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{24} = 210$$

(۲۰) فرض کنید $P(A|B) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{6}{36}$, $P(A) = \frac{4}{36}$ آنگاه $P(B|A)$ را بیابید.

پاسخ:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A|B) \rightarrow P(B|A) = \frac{\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{6}{36}} = \frac{6}{42} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(۲۱) اگر $\frac{329}{6}$ $E(X^2) = \sum x^2 f(X) = 7$ و $E(X) = \sum x f(x) = 7$ باشد، مقدار واریانس متغیر تصادفی X را بیابید.
پاسخ:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x^2 f(X) - (\sum x f(x))^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329 - 294}{6} = \frac{35}{6}$$

(۲۲) در جدول روبرو میانگین توزیع نظری چقدر است؟
پاسخ: مقدار میانگین توزیع نظری (یا امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار) از فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\mu_X = E(X) = \sum x f(x) = (0 \times 0.2) + (1 \times 0.3) + (3 \times 0.5) = 0 + 0.3 + 1.5 = 1.8$$

(۲۳) در جدول توزیع احتمال روبرو مقدار k چقدر است؟
پاسخ: با توجه به اینکه مجموع مقادیر تابع چگالی احتمال همواره برابر با یک است داریم:

$$1 = \sum f(x) = 0.2 + k + 0.25 + 0.3 \rightarrow k = 1 - (0.2 + 0.25 + 0.3) = 1 - 0.75 = 0.25$$

(۲۴) در جدول توزیع احتمال روبرو مقدار میانگین چقدر است؟
پاسخ: مقدار میانگین توزیع نظری (یا امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار) از فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\mu_X = E(X) = \sum x f(x) = (-1 \times 0.2) + (0 \times 0.3) + (1 \times 0.5) = -0.2 + 0 + 0.5 = 0.3$$

موفق باشید، اوج بک

چند تبدیل مهم:

در مواردی میتوان از تبدیل ها استفاده کرد که بین میانگین و واریانس گروه ها رابطه ای وجود داشته و شکل توزیع خطا در تمام آنها یکسان باشد. متداولترین تبدیل هایی را که می توان بکاربرد عبارتند از تبدیل جذری (ریشه دوم)، تبدیل لگاریتمی، تبدیل معکوس و تبدیل وارون سینوس تصمیم درباره اینکه کدام تبدیل را باید بکاربرد براساس بررسی رابطه بین واریانسها و میانگینهای متغیر آغاز میشود. ماهیت این رابطه تعیین میکند که کدام تبدیل را بکار برد (فرگوسن و تاکانه، ۱۳۸۳: ۳۲۶).

تبدیل جذری: هرگاه متغیر وابسته فراوانی وقوع حادثه ای با احتمال خیلی کم باشد، از تبدیل جذری می توان استفاده کرد. این تبدیل هنگامی مناسب است که واریانسها با میانگینها متناسب باشند.

تبدیل لگاریتمی: در مواردی که بعضی از نمرات صفر و یا خیلی کوچک باشند، از این تبدیل استفاده میشود. استفاده از این تبدیل در مواردی که توزیع متغیر وابسته، کج مثبت باشد مفید است.

تبدیل معکوس: چنانچه مجذور میانگین گروهها متناسب با واریانس گروهها باشد یک تبدیل معکوس مناسب است. در مواقعی که یکی از نمرات صفر باشد از تبدیل دوم استفاده میکنیم.

تبدیل وارون سینوسی: در مواردی که واریانس ها متناسب با میانگین ها باشند و توزیع دو جمله ای باشد از این تبدیل استفاده می کنیم.