فصل سوم

استقراء

۱. استقراء

استادی یک کیف پر از آب‌نبات به کلاس می‌آورد. او ترجیح می‌دهد که آب‌نبات‌ها را بـا اسـتفاده از دو قانون به دیگران بدهد. ابتدا دانش‌آموزان را شماره‌گذاری می‌کند، ...,۱,۲,۳ و الی آخـر تـا بتواند به آنها ارجاع دهد. اینک به دو قانون می‌پردازیم:

۱- دانش‌آموز صفر 0 آب‌نبات گیرش می‌آید.

۲- به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$، اگر دانش‌آموز n آب‌نبات دریافت کند، آنگاه دانش‌آموز $n+1$ هم آب‌نبات می‌گیرد.

می‌توانید به دومین قانون به مثابهٔ راه فشردهٔ نگارش تمام جملات دنباله فکر کنید، یکی به ازاء هر مقدار طبیعی n:

- اگر دانش‌آموز ۰ آب‌نبات بگیرد، پس دانش‌آموز ۱ هم آب‌نبات می‌گیرد.
- اگر دانش‌آموز ۱ آب‌نبات بگیرد، پس دانش‌آموز ۲ هم آب‌نبات می‌گیرد.
- اگر دانش‌آموز ۲ آب‌نبات بگیرد، پس دانش‌آموز ۳ هم آب‌نبات مـی‌گیـرد و الـی آخر .

اینک فرض کنید که شما دانش‌آموز ۱۷ باشید. با این قوانین آیا برای دریافت آب‌نبات ثبت نام شده‌اید؟ خوب، دانش‌آموز ۰ با قاعدهٔ اول آب‌نبات گیرش می‌آید. بنابر این با قانون دوم، دانش‌آموز ۱ هم آب‌نبات می‌گیرد، که به این معنی است که دانش‌آموز ۲ هم آب‌نبات می‌گیرد، که دانش‌آموز ۳ هم گیرش می‌آید، والی آخر- بنابر این دو قانون استاد عملاً آب‌نبات برای هر دانش‌آموزی را تضمین می‌کند، مهم نیست کلاس چقدر بزرگ باشد. برنده شدید!

این برهان به اصلی که استقراء نامیده می‌شود تعمیم می‌یابد:

اصل استقراء فرض کنید $P(n)$ گزاره باشد. اگر

- $P(0)$ صحیح باشد، و
- به ازاء هر $P(n), n \in \mathbb{N}$ دلالت کند بر $P(n+1)$

نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به ازاء تمام $n \in \mathbb{N}$ صحیح است.

تناظر میان اصل استقراء و سهیم شدن در آب‌نبات این چنین است. فرض کنیم، $P(n)$ گزارهٔ "دانش آموز n آب‌نبات می‌گیرد" باشد. پس قاعدهٔ اول استاد ثابت می‌کند که $P(0)$ صحیح است و قانون دومش که به ازاء همه $P(n),\ n \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کند $P(n+1)$. بر اساس این حقایق اصل استقراء می‌گوید که $P(n)$ برای همهٔ $n \in \mathbb{N}$ صحیح است. به سخن دیگر همه آب‌نبات گیرشان می‌آید. توجیه غیر استدلالی اصل استقراء مثل آن است که براساس در قانون استاد هر کسی آب‌نبات گیرش می‌آید. بنابر این اصل استقراء به صورت جهانی به عنوان یک

روش برهان دقیق و آشکار پذیرفته شده است. چیزی که خیلی آشکار نیست این است که با استفاده از این تا کجا می‌توانیم برسیم.

۲. کاربرد استقراء:

استقراء تا کنون نیرومندترین و همگانی‌ترین تکنیک استدلالی پرکاربرد در ریاضیات گسسته و علوم کامپیوتر است. در واقع، استفاده از استقراء یک مشخصهٔ برای گسسته– در تضاد با ریاضیات پیوسته — است.

استقراء اغلب بطور مستقیم برای اثبات اینکه گزاره‌ای به ازاء همه اعداد طبیعی برقرار است بکار می‌رود. برای مثال، یک فرمول کلاسیک از این قرار است:

قضیه ۱. ۲ به ازاء همهٔ $n \in \mathbb{N}$

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

سمت چپ معادله (۱) بیانگر مجموع تمام اعداد از ۱ تا n است. شما موظفید الگوی نمونه را حدس بزنید و اخلاقاً نقاط (...) را با عبارات دیگر جایگزین کنید. می‌توانیم نیاز به حدس زدن را با دوباره نویسی سمت چپ معادله با نماد جمع‌بندی حذف کنیم.

$$\sum_{i=1}^{n} i \qquad \text{یا} \qquad \sum_{1\le i\le n} i \qquad \text{یا} \qquad \sum_{i\in\{1,\ldots n\}} i$$

هر یک از این بیان‌ها مقدار مجموع را مقادیر را مشخص می‌کند سمت راست سیگما به عنوان یک متغیر، i، وقتی i از ۱ تا n تغییر می‌کند بیان می‌کند. معنی حاصل جمع در قضیه ۱. ۲ در یکی از موارد خاص خیلی آشکار نیست:

- اگر $n = ۱$ باشد، پس فقط یک عبارت در جمع‌بندی وجود دارد، $۱+۲+۳+...+n = ۱$. از ظاهر ۳,۲ و نمادی که n,۱ عبارتهای مختلفی هستند به اشتباه دچار نشوید.
- اگر $n \leq ۰$ باشد، بنابر این ابداً هیچ عبارتی در جمع‌بندی وجود نـدارد و بـر ایـن اسـاس $۱+۲+۳+...+n = ۰$.

تماد نقطه گذاری مناسب است ولی مواظب این موارد ویژه باشـید جـائی کـه عددنویسـی بیراهـه رفتن است!

حالا بیائید از اصل استقراء برای اثبات قضیه ۱. ۲ استفاده کنیم. فرض کنید که گـزارهٔ $P(n)$ را در نظر بگیریم که "$۱+۲+۳+...+n = n(n+۱)/۲$" دوباره عبارتهای این گزاره را مطرح کنید، قضیه ثابت می‌کند که $P(n)$ به ازاء تمام $n \in \mathbb{N}$ صحیح است. عالی است، چونکه اصل استقراء بـه ما اجازه می‌دهد که مشخصاً به نتیجه دست یابیم، دو واقعیت ساده‌تر را بنا می‌گذاریم:

- $P(۰)$ صحیح است.
- به ازاء همه $n \in \mathbb{N}$، $P(n)$ ثابت می‌کند $P(n+۱)$

بنابر این کار ما به اثبات این دو گفته کاهش می‌یابد. اولی صحیح است زیرا $P(۰)$ ثابت می‌کند که یک حاصل صفر هر چه باشد برابر است با $۰ = ۰(۰+۱)/۲$.

دومین مطلب پیچیده‌تر است. ولی طرح اساسی اثبات معتبر بودن هر قضیه را بخاطر داشته باشـید: عبارت سمت چپ را در نظر بگیرید و بعد عبارت سمت راست را اثبـات کنیـد. در ایـن حالـت، فرض می‌کنیم: $P(n)$

$$۱+۲+۳+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

به منظور اثبات: $P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

این دو معادله کاملاً شبیه هستند: در واقع، افزودن $(n+1)$ به هر دو سمت اولین معادله و ساده کردن سمت راست، معادلهٔ دوم را بدست می‌دهد:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

لذا، اگر $P(n)$ صحیح باشد، $P(n+1)$ هم صحیح است. این برهان برای هر عدد صحیح n معتبر است، از این روی این دومین واقعیت را بنا می‌کند که توسط اصل استقراء الزامی است. در عمل ما همین الآن ثالت کردیم که $P(0)$ دلالت می‌کندبر $P(1)$، $P(1)$ دلالت می‌کند بر $P(2)$، $P(2)$ دلالت می‌کند بر $P(3)$ و غیره. همه به همین ترتیب واقع می‌شوند.

با در دست داشتن این دو حقیقت به اصل استقراء می‌گوید که گزارهٔ $P(n)$ به ازاء کلیهٔ اعداد طبیعی n صحیح است و بنابر این قضیه ثابت می‌شود!

۱. ۲ الگویی برای برهان‌های استقراء

برهان قضیهٔ ۱. ۲ نسبتاً ساده بود ولی حتی پیچیده‌ترین برهان استقرائی دقیقاً از همان الگو تبعیت می‌کند. پنج مؤلفه وجود دارند.

۱- **توضیح بدهید که برهان از استقراء استفاده می‌کند.** این توضیح بلافاصله به سراسر ساختار برهان منتقل می‌شود که به خوانند کمک می‌کند استدلال شما را بفهمد.

۲- **یک گزارهٔ صحیح را معین کنید** $P(n)$. نتیجهٔ نهایی برهان استقراء چنین خواهد بود که $P(n)$ برای کلیه اعداد طبیعی n صحیح است. پس باید گزاره $P(n)$ را مشخص سازید به

طوری که قضیهٔ شما معادل (یا نتیجه) با این قضیه باشد. اغلب گزاره می‌تواند از فرضیه مستقیماً برداشته شود، مانند مثال بالا. گزارهٔ $P(n)$ "پیش‌فرض استقراء " خوانده می‌شود. بعضی وقتها پیش‌فرض استقراء متغیرهای چندی را درگیر می‌سازد در حالتی که بتوانید خاطرنشان کنید کدام متغیر مانند n کار می‌کند.

۳- ثابت کنید که $P(\circ)$ صحیح است. همانطور که در مثال بالا آمد، معمولاً کار آسانی است. این قسمت از برهان "پایه استرا" یا "مرحلهٔ پایه‌ای" نامیده می‌شود. (بعضی وقتها حالت پایه $n = ۱$ یا حتی عددی به مراتب بزرگتر خواهد بود، در حالتی که مقدار اولیهٔ n هم توضیح داده خواهد شد.)

٤- ثابت کنید که به ازاء هر عدد طبیعی n، $P(n)$ دلالت دارد بر $P(n+۱)$. این را مرحلهٔ "مرحله استقرائی" یا "مرحلهٔ استقراء" می‌نامند. طرح پایه‌ای همیشه همان است: فرض کنید که $P(n)$ صحیح است و آنگاه از این فرض استفاده کنید تا ثابت کنید که $P(n+۱)$ صحیح است. این دو فرض انصافاً باید یکسان باشند، ولی پرکردن آن شکاف ممکن است مقداری قوهٔ ابتکار نیاز داشته باشد. استدلال شما هر چه که باشد باید برای هر عدد طبیعی n معتبر باشد، زیرا که مقصود اثبات یکباره گزاره‌های زیر است.

$$P(\circ) \to P(۱), P(۱) \to P(۲), P(۲) \to P(۳), \ldots$$

۵- استقراء استنادی. با حقایق داده شده، اصل استقراء به شما اجازه می‌دهد که نتیجه‌گیری کنید که $P(n)$ به ازاء همهٔ اعداد طبیعی (n) صحیح است. این چرخهٔ تمامیت استدلال است، ولی بسیاری از نویسندگان از این مرحلهٔ روشن چشم پوشی می‌کنند.

بطور واضحی مستند کردن حالت پایه و مرحلهٔ استقرائی ممکن است اثبات‌های شما را واضح‌تر کند.

۲. ۲ یک نوشتهٔ تمیز تمام عیار

اثبات قضیهٔ ۱. ۲ ارائه شده در بالا کاملاً معتبر است، ولی با این وجود حاوی مقدار زیادی از شرح و بیان‌های اضافی است که معمولاً در اثبات‌های استقرائی مشاهده نمی‌کنید.

اثباتی که در زیر مطرح شده شیوه‌ای است که شما در نمونه می‌بینید و شما را آماده خواهد کرد تا خودتان انجام دهید.

اثبات. از استقراء استفاده می‌کنیم. پیش‌فرض استقرائی $P(n)$ معادلهٔ (۱) خواهد بود.

حالت پایه: $P(\circ)$ صحیح است، زیرا هر دو طرف معادله (۱) مساوی صفر است وقتی که $n=\circ$ باشد.

مرحلهٔ استقرائی: به فرض که $P(n)$ صحیح باشد، وقتی که n هر عدد طبیعی باشد. پس توسط

پیش‌فرض استقراء $\leftarrow 1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

توسط جبر ساده $\leftarrow =\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

که ثابت می‌کند $P(n+1)$

بنابر این با استقراء ثابت می‌شود که $P(n)$ به ازاء کلیه اعداد طبیعی n صحیح است.

استقراء برای اثبات صحت این فورمول جمع‌بندی مفید بود ولی برای کشف این فورمول در جای اول مفید نبود. ترفندهایی برای یافتن چنین فورمولهایی وجود دارند که در چند هفتهٔ دیگر به شما نشان خواهیم داد.

۳. ۲ دنبالهٔ فیبوناچی

برای مثال ساده‌ای دیگر از کاربرد استقراء اعداد فیبوناچی[1] را در نظر خواهیم گرفت.

دو عدد اول فیبوناچی صفر و یک هستند و بقیه اعداد فیبوناچی مجموع دو عدد قبلی است. عـدد فیبوناچی nام به شکل F_n نمایش داده می‌شود. به سخن دیگر، اعداد فیبوناچی مکرراً بـا قـوانین ذیل معرفی شده‌اند.

$F_۰ ::= ۰,$

$F_۱ ::= ۱,$

$F_i ::= F_{i-۱} + F_{i-۲},$ برای $i \geq ۲$

۱. فیبوناچی ریاضی‌وان قرن سیزدهم بود که نمونه سازی اعداد مربوط به روند رشد جمعیت خرگوشـها خـود را مطرح کرد. یک نمونهٔ سادهٔ رشد جمعیت خرگوشها در نظر می‌گیرد که یک جفت خرگوش در سن یک مـاهگی، دو خرگوش دیگر را به دنیا می‌آورند و پس از آن به باز تولید یک جفت خرگوش در هر ماه ادامه خواهند داد، در نظر بگیریم که F_n مجمموعه تعداد جفتهای خرگوش در شروع nماه باشند، و B_n تعداد زوجهـای رو بـه رشـد باشد، یعنی که، جفتهایی که حداقل یک ماهه باشند. حالا جفت‌هایی در nماه. همان جفتهای $F_{n-۱}$ هستند که ماه پیش داشتیم، افزون بر اینکه یـک جفـت نوزادهـای $B_{n-۱}$ توسـط جفتهـای مـاه قبـل بـدنیا آمـده‌انـد بنـابر ایـن $F_n = F_{n-۱} + B_{n-۱}$ همچنین، مجموعه جفتهای رو به رشد در ماهگی بسادگی جمع همه همان جفتهایی هستند کـه ماه قبل داشتیم، بنابر این $B_n = F_{n-۱}$. جابجایی $B_{n-۱}$ با $F_{n-۲}$ نتیجه می‌دهد (۲).

اولین اعداد فیبوناچی از این قرارند

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

اعداد فیبوناچی به طور طبیعی به چند روش مطرح می‌شوند، ولی آنها با اهمیت کاربردی‌شان یک شرح مداوم ریاضی را به خود منحصر کرده‌اند زیرا مجموعه‌ای از خصوصیات غنی و شگفت آور دارند، مثل نمونه‌ای که در قضیه پایین مطرح می‌شود. این قضیه چیز خوبی است تا فضای ذهنی آرام پیدا کنید، اثبات آن تشریحی خوب برای استقراء فراهم می‌کند.

قضیه ۲. ۲ $\forall n \geq 0. F_0^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \quad F_{n+1}$

برای مثال، به ازاء $n = 4$ داریم

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5$$

بیائید نگاهی به استقرا بیاندازیم. ابتدا، شرح قضیه پیشنهاد می‌کند که پیش‌فرض استقراء $P(n)$ چنین باشد.

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}. \qquad (3)$$

دوم، می‌خواهیم فاصلهٔ میان $P(n)$ و $P(n+1)$ را مشخص کنیم. گزارهٔ $P(n+1)$بیان می‌کند که

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} F_{n+2}. \qquad (4)$$

حالا برنامه این است که از $P(n)$ استفاده کنیم تا این توضیح را بـه یـک ادعـا (گـزاره) سـاده‌تـر کاهش دهیم. یک راه ساده کم کردن معادله ۳ از ٤ است. نتیجه اینکه:

$$F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+1}. \qquad (5)$$

این همان فرمول بازگشت فیبوناچی درلباس مبدل است در طرف ۵ را به $Fn+1$ تقسیم کنیم تا عبارت $Fn+Fn+1=Fn+2$ را بدست آوریم. این نیاز واقعی برای پرکردن فاصله میان $P(n)$ و $P(n+1)$ در مرحلهٔ استقرائی است.

اثبات کامل در پائین نوشته می‌شود:

اثبات. اثبات با استقراء انجام می‌گیرد. بر فرض که $P(n)$ معادلهٔ ۳ باشد.

حالت پایه: $P(0)$ صحیح است چونکه

$$F_0^2 = 0^2 = 0 = 0.1 = F_0 F_1$$

مرحلهٔ استقرائی: فرض کنیم که معادله ۳ برای $n \geq 0$ صدق کند، به این ترتیب ثابت می‌کنیم که

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} F_{n+2}$$

برای هر $n \geq 0$، معادله $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ با تعریف اعداد فیبوناچی صدق می‌کند. ضرب هر دو طرف در F_{n+1} و تنظیم مجدد عبارات، $F_{n+1}^2 = F_{n+1} + F_{n+2} - F_n F_{n+1}$ را بدست می‌دهد. با افزون این رابطه به معادله ۳ بدست می‌آوریم:

$$F^2{}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = (F_{n+1} F_n - F_n F_{n+1}) F_n F_{n+1}$$

بنابر این

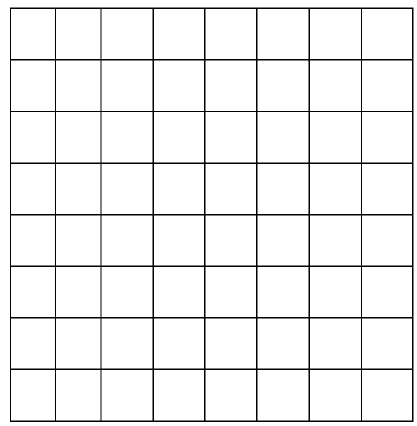
$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} F_{n+2},$$

همان طور که شایسته است.

بنابر این با استقراء نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ ۳ به ازاء همه $n \in \mathbb{N}$ صدق می‌کند. □

۳. ۲ کاشی کاری حیاط

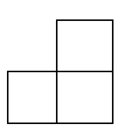
۲^n



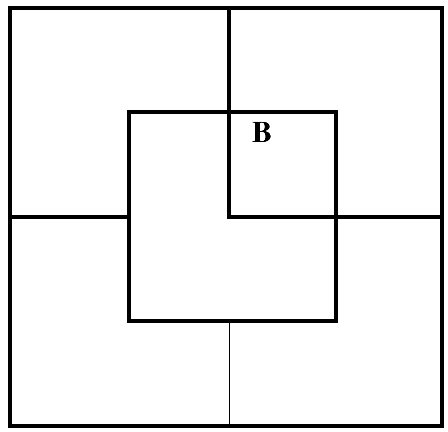
۲^n

استقراء به صورت خالصانه‌ای به عنوان یک تکنیک اثبات در مثالهای پیشین خدمت کرد. ولی گاهی وقتها استقراء می‌تواند به عنوان ابزاری عمومی‌تر برای برهان آوری به کار رود. کمپانی MIT به تازگی ساختمان علوم رایانه‌ای جدیدی ساخته است. همان طور که پروژه بودجهٔ بیشتر و بیشتری می‌طلبید، تعدادی عقاید اساسی افزایش سرمایه به میان آمد یک طرح ایجاد حیاط کاشی کاری شده با ابعاد $۲^n\times۲^n$ بود:

یکی از مربع‌های مرکزی عملاً توسط مجسمه‌ای از یک اهدا کنندهٔ متمول اشغال خواهد شد. فرضاً او را "بیل" می‌نامیم. (در حالت ویژه $n=۰$، کل حیاط از یک مربع مرکزی تنها تشکیل می‌شود. با اینکه، چهار مربع مرکزی وجود دارند) یک پیچیدگی این بود که معمار پیمانکار ساختمان، فرانک جری، مُصِر بود که فقط کاشی‌های L شکل مورد استفاده قرار بگیرد:



حیاطی که با این قیدها روبرو شود، حداقل به ازاء $n=2$ چنین است:



به ازاء مقدارهای وسیع‌تر n آیا راهی برای کاشی کاری حیاط با کاشی‌های L شکل با وسعت $۲^n \times ۲^n$ و ایجاد یک مجسمه در مرکز آن وجود دارد؟ بیائید تلاش کنیم تا ثابت کنیم که این چنین است.

قضیه.۳. ۲ به ازاء تمام $n \geq ۰$ یک کاشی کاری به وسعت $۲^n \times ۲^n$ وجود دارد به همراه بیل که در مرکز است.

اثبات. (تلاش محکوم)اثبات با استقراء انجام می‌گیرد. فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای باشد که حیاطی است به وسعت $۲^n \times ۲^n$ و در مرکز آن هم بیل قرار می‌گیرد.

حالت پایه: $P(۰)$ صحیح است برای اینکه بیل تمام حیاط را پر می‌کند.

مرحله استقرائی: فرض کنید که حیاطی کاشی کاری شده با وسعت $۲^n \times ۲^n$ با بیل که در مرکز است. به ازاء مقداری $n \geq ۰$ قرار دارد. باید ثابت کنیم که راهی برای کاشی کاری حیاطی به وسعت $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ و بیل که در مرکز آن باشد وجود دارد. . . □

اینک به دردسر افتاده‌ایم! توانایی کاشی کردن حیاطی کوچکتر کـه بیـل در مرکـز آن باشـد کمـک زیادی به کاشی کاری حیاطی وسیع‌تر که بیل در مرکز آن باشد نمی‌کند. ما نشان نداده‌ایم چگونـه فاصلهٔ میان $P(n)$ و $P(n+۱)$ را پر کنیم.

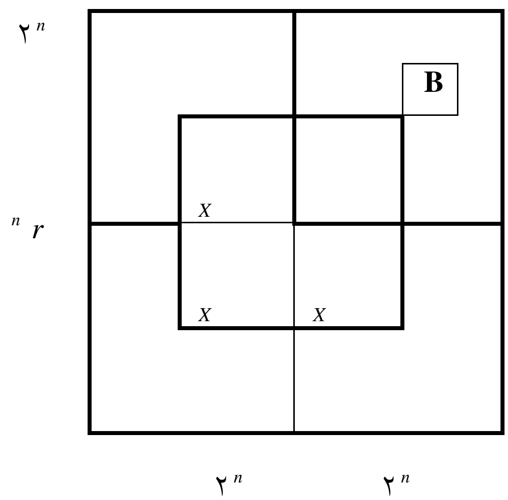
به این ترتیب اگر قصد داشته باشیم قضـیه۳. ۲ را بـا اسـتقراء ثابـت کنـیم، بـه تعـدادی دیگـر از پیش‌فرض‌های استقراء بانسبت ساده‌تر از قضیه برای n که قصد اثبات آن را داریم نیـاز خـواهیم داشت.

وقتی که این اتفاق می‌افتد، برگشت شما باید جستجو برای پیدا کردن یـک پـیش‌فـرض قـوی‌تـر باشد، یعنی که ، یکی که بر پیش‌فرض قبلی شما دلالت کند. برای مثال، می‌توانیم در نظـر بگیـریم $P(n)$ گزاره‌ای باشد که به ازاء هر مکان بیل در حیاط $۲^n \times ۲^n$ قـرار بگیـرد، بـاقی مانـدهٔ کاشـی کاری بجا می‌ماند. این گفته شاید عجیب به نظر برسد: "اگر نمی‌توانی چیزی را ثابت کنی، تـلاش کن چیز بزرگتری را ثابت کنی". ولی برای برهان‌های استقراء این حرف با معنی است. در مرحلـهٔ استقرائی، آنجا که ملزم به اثبات $P(n) \rightarrow P(n+۱)$ هسـتید، شـما در حـالتی بهتـر قـرار داریـد چونکه می‌توانید فرض کنید $P(n)$، که الآن حالت، کلی‌تری را دارد، برقرار است. بیائید ببینم این مسئله در مورد کاشی کاری حیاط چه نقشی ایفا می‌کند.

اثبات. (تلاش مقبول) اثبات با استقراء انجام می‌شود. فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای باشد که در ازاء هر مکانی، بیل در حیاط $۲^n \times ۲^n$ قرار بگیرد. کاشی کاری باقیمانده هنوز به جا مانده است.

حالت پایه: $p(۰)$ صحیح است زیرا بیل تمام حیاط را پر می‌کند.

مرحله استقرائی: فرض کنید $p(n)$ در برای $n \geq ۰$ صحیح است، یعنـی کـه حیـاطی بـا وسـعت $۲^n \times ۲^n$ به ازاء هر مکانی که متعلق به بیل باشد، کاشی کاری مـی‌شـود. حیـاط $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ را بـه چهار تقسیم کنید، هر کدام $۲^n \times ۲^n$. یکی از این چهار قسمت شامل بیل مـی‌شـود(B در نمـودار پائین). یک بیل موقت (که در نمودار x) را در هر کدام از سه مربع مرکـزی خـارج از ایـن یـک چهارم صفحه جای دهید:



حالا می‌توانیم هر یک چهارم صفحه را با فرض استقراء کاشی کنیم. جابجا کردن سه بیل موقت با شکل اِل مانند کار را تمام می‌کند. این ثابت می‌کند که $p(n)$ دلالت می‌کند بـر $P(n+۱)$ بـه ازاء همه $n \geq ۰$. قضیه یک حالت خاص این اثبات است.

این برهان دو ویژگی خوب دارد. اول اینکه، نه تنها این استدلال تضمین می‌کند کـه کاشـی کـاری وجود دارد، بلکه همچنین یک راه حل تراجعی بازگشتی برای یافتن چنین کاشـی کـاری بدسـت می‌دهد. دوم اینکه ، نتیجه‌ای قوی‌تر داریم : اگر بیل می‌خواست مجسمه‌اش بر لبهٔ حیاط باشد بـه دور از کبوترها، می‌توانستیم جایی برایش در نظر بگیریم!

قوی‌تر کردن فرض استقراء حرکت خوبی است وقتی که اثبات استقراء راه باز نمـی‌کنـد. ولـی در خاطر داشته باشید که ادعایی قوی‌تر باید در عمل صحیح باشد، وگرنه، امید زیادی به ساختن یک

برهان معتبر وجود ندارد! گاهی وقتها یافتن پیش فرض استقراء درست، احتیاج به آزمایش خطا و صحت دارد. برای مثال، ریاضی‌دانان بیست سال وقت صرف می‌کردند تا حدس "گراف‌ها مسطح ٥ سطح انتخاب پذیرهستند دارد" را ثابت یا رد کنند. سپس در سال ۱۹۹٤ کارستن توماسن برهان استقرائی ارائه کرد بقدری ساده که روی دستمال سفره هم امکان توضیح آن بود. کلید اشاره داشت به یافتن حدس استقراء بی نهایت هوشمندانه، که با در دست داشتن آن، تکمیل برهان آسان است!

٥. ٢ یک برهان استقراء نادرست

قضیه غلط. همهٔ اسبها یک رنگ دارند.

به یادداشته باشید که هیچ n در این ادعا مورد توجه قرار نگرفته است، بنابر این می‌خواهیم آن را دوباره فرمول‌بندی به روشی کنیم که یک n را روشن سازد. بخصوص (بطور غلط) ثابت می‌کنیم که

قضیه غلط ٤. ٢ در هر مجموعهٔ $n \geq ۱$ اسبی، همهٔ اسبها یک رنگ دارند.

این قضیه دربارهٔ تمام اعداد صحیح $n \geq ۱$ بجای ≥ ۰ است. بنابر این طبیعی است که با تغییری کوچک استقراء را به کار برد: ثابت کنید $P(۱)$ در حالت پایه و بعد ثابت کنید که $P(n)$ دلالت دارد بر $P(n+۱)$ به ازاء تمام $n \geq ۱$ در مرحلهٔ اسقرائی. این یک متغیر کاملاً معتبر استقرائی است و با برهان زیر مشکلی ندارد.

برهان. برهان بوسیلهٔ استقراء انجام می‌گیرد. پیش فرض استقراء $P(n)$ اینگونه خواهد بود

در هر مجوعه n اسبی، همهٔ اسبها یک رنگ دارند. ٦

حالت پایه: $(n=1)$. $P(1)$ صحیح است، برای اینکه در مجموعه‌ای از اسبهای در اندازهٔ ۱، فقط یک اسب وجود دارد و این اسب یقیناً همان رنگ خود را داراست.

مرحلهٔ استقرائی: فرض کنید که $P(n)$ در ازاء، مقدار $n \geq 1$ صحیح است، یعنی که فرض کنید که در هر مجموعهٔ n اسبی، همه یک رنگ را دارند. اینک یک مجموعهٔ اسب $n+1$ را در نظر بگیرید:

$$h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}$$

با فرض ما، اولین n اسب هم رنگ‌اند:

$$\underbrace{h_1, h_2, \ldots, h_n}_{\text{به یک رنگ}}, h_{n+1}$$

همچنین با فرض ما، آخرین n اسبها، هم‌رنگ‌اند:

$$h_1, \underbrace{h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}}_{\text{همان رنگ}}$$

بنابر این، اسبهای $h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}$ باید همه به همان رنگ باشند و به این ترتیب $P(n+1)$ صحیح است. از این رو، $P(n)$ دلالت میکند بر $P(n+1)$. بوسیلهٔ اصل استقراء، $P(n)$ به ازاء تمام $n \geq 1$ صحیح است. □

ما چیزی غلط را ثابت کرده‌ایم! آیا ریاضیات از هم پاشیده است؟ بهتر نیست همگی شاعر شویم؟ اشتباه در این برهان در آن جمله ایست که می‌گوید "بنابر این اسبهای $h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}$ باید همه یک رنگ باشند." ... "این تأثیر را بوجود می‌آورد که مجموعه‌های $h_2, \ldots h_n, h_{n+1}$ و $h_1, h_2, \ldots, h_n, h_2$ با هم عضو مشترک دارند. با این وجود، وقتی که $n=1$ باشد این صحیح نیست.

در آن حالت اولین مجوعه تنها h_1 است و مجموعهٔ دوم h_2 و اینها ابداً با هم عضو مشترک ندارند!

این اشتباه یک رابطهٔ بحرانی از برهان استقراء ما را از میان می‌برد. ما ثابت کردیم $P(1)$ و به درستی ثابت کردیم که، $P(2) \to P(3), P(3) \to P(4)$، صحیح هستند و البته همهٔ این گزاره‌ها غلط هستند، اسبهایی هستند که رنگهای متفاوت دارند.

گاهی وقتها دانشجویان ادعا می‌کنند که اشتباه موجود در برهان به این دلیل است که $P(n)$ به ازاء $n \geq 2$ غلط است و برهان نیز نادرستی را فرض می‌کنند، مثلاً $P(n)$، به منظور اثبات $P(n+1)$.

شما باید فکر کنید چطور به چنین دانشجویانی توضیح بدهید چرا این قضیه در یک امتحان ۶/۰۴۲ هیچ نمره‌ای ندارد.

٤. استقراء قوی

۱. ۳ اصل استقراء قوی

یک نمونهٔ مختلف استقراء مفید استقراء قوی نامیده می‌شود. استقراء قوی و استقراء معمولی دقیقاً برای یک منظور بکار می‌روند: اثبات اینکه یک گزارهٔ $P(n)$ به ازاء (در مقابل) همهٔ $n \in \mathbb{N}$ صحیح است.

اصل استقراء قوی. فرض که $P(n)$ یک گزاره باشد. اگر • $P(0)$ صحیح باشد و • به ازاء تمام $n \in \mathbb{N}$, $P(0)$ و $P(1), \ldots, P(n)$, با هم به درستی $P(n+1)$ دلالت کنند، نتیجه اینکه $P(n)$ به ازاء کلیه $n \in \mathbb{N}$ صحیح است.

تنها تفاوت استقراء معمولی با قوی این است که استقراء قوی به شما اجازه می‌دهد اجزاء بیشتری را در مرحلهٔ استقرائی برهان خود در نظر بگیرید! در یک برهان استقراء عادی در نظر می‌گیرید که $P(n)$ صحیح است و سعی می‌کنید صحیح بودن $P(n+۱)$ را هم ثابت کنید. در یک برهان استقراء قوی، ممکن است فرض کنید $P(۰), P(۱), \ldots, P(n)$ همه صحیح هستند وقتی که می‌خواهید $P(n+۱)$ را ثابت کنید. این فرضیه‌های فرعی فقط می‌توانند کار شما را آسان‌تر کنند.

۲. ۳ حاصل‌ضرب‌های اعداد اول

به عنوان اولین مثال، از استقراء قوی استفاده خواهیم کرد تا یکی از آن حقایق آشنایی که تقریباً، البته نه اینکه کاملاً، آشکار است را ثابت کنیم:

لم ۱. ۳ هر عدد زوج بزرگتر از ۱ حاصل‌ضرب اعداد اول است.

به یاد داشته باشید که به صورت قراردادی، هر عددی می‌تواند حاصل متشکل از یک عبارت، مثلاً خودش باشد. به طور خاص هر عدد اولی حاصل متشکل از یک عبارت است که همگی اول‌اند.

برهان. لم ۱. ۳ را با استقراء قوی اثبات خواهیم کرد، فرض کنیم شرطض استقراء $P(n)$،به صورت زیر باشد $n+۲$، حاصل‌ضرب اعداد اول است.

بنابر این لم ۱. ۳ برقرار است اگر ثابت کنیم که $P(n)$ به ازاء تمام $n \geq ۰$ صدق می‌کند.

حالت پایه: $p(۰)$ صحیح است زیرا $۲+۰$ عدد اول است و همین طور بصورت قراردادی حاصل‌ضرب اعداد اول است.

مرحلهٔ استقرائی: فرض کنید که $n \geq ۰$ و اینکه $i+۲$ حاصل‌ضرب اعداد اول باشند برای هر عدد طبیعی $i < n+۱$. ما باید نشان بدهیم که $P(n+۱)$ صدق می‌کند، مثلاً که $n+۳$ هم حاصل‌ضرب اعداد اول است. ما با حالت زیر ادامه می‌هیم:

اگر $n+۳$ عدد اول باشد، پس به طور قراردادی حاصل‌ضرب اعداد اول است، بنابر این $P(n+۱)$ در این وضعیت صادق است. در غیر این صورت اگر، $n+۳$ عدد اول نباشد، آنگاه به ازاء اعداد طبیعی k,m وجود دارد به طوری که $۲ \leq k,m < n+۳$ و $n+۳=km$. به این ترتیب $k-۲$ یک عدد طبیعی است کمتر از $n+۱$ که معنی‌اش اینست $(k-۲)+۲$ حاصل‌ضرب اعداد اول است که توسط پیش‌فرض استقراء بدست می‌آید. یعنی که، k حاصل‌ضرب اعداد اول است. بطور مشابه، m حاصل‌ضرب اعداد اول است.

بنابر این $km = n+۳$ هم حاصل‌ضرب اعداد اول است با این حساب $P(n+۱)$ هم در این قضیه بخوبی صدق می‌کند.

بنابر این $P(n+۱)$ در هر حالتی صادق است، که این برهان را با استقراء قوی ثابت می‌کند یعنی $P(n)$ به ازاء تمام اعداد طبیعی n صادق است. □

برخلاف نامش، استقراء قوی عملاً خیلی نیرومندتر از استقراء عادی نیست. به سخن دیگر، هر قضیه‌ای را که بتوان با استقراء قوی اثبات نمود با استقراء عادی هم می‌توان اثبات کرد (با استفاده از پیش فرض‌های استقرائی پیچیده‌تر). ولی استقراء قوی می‌تواند تعدادی از برهان‌ها را کمی آسان‌تر کند. از سویی دیگر، اگر $P(n)$ به سادگی برای اثبات $P(n+۱)$ کافی باشد، پس به دلیل سادگی بهتر است از استقراء عادی استفاده شود.

۳. ۳ ایجاد تغییر

کشور اینداکتیا، که واحد پولش استرانگ است، سکه‌های $6S$ (استرانگی)، $10S$ و $15S$ دارد. با این حال اهالی اینداکتیا برای پول خردِ کمی مشکل دارند مثل $11S$ یا $29S$، نتیجه اینکه آنها می‌توانند سکه‌ها را جمع کنند تا هر گونه تغییری در تعداد سکه‌های استرانگ بزرگتر از $29S$ ایجاد کنند.

استقراء قوی اثبات این را که به ازاء $n+1>35$ آسان می‌کند، زیرا $(n+1)-6>29$، بنابر این اهالی اینداکتیا می‌توانند بوسیله استقراء قوی تغییرات دقیقی برای $S((n+1)-6)$ ایجاد کنند و سپس می‌توانند یک سکۀ $6S$ را اضافه کنند تا $S(n+1)$ را بدست آورند. بنابر این تنها کاری که لازم است انجام شود بررسی این است که می‌توانند تغییری برای همۀ مبالغ ۳۰ تا ۳۵ را ایجاد کنندکه انجام این کار خیلی هم سخت نیست.

در اینجا نگارشی مفصل با استفاده از قالب رسمی وجود دارد:

برهان. ثابت می‌کنیم که اهالی اینداکتیا بوسیلۀ استقراء قوی می‌توانند برای مبالغ بیشتر از $29S$ تغییر ایجاد کنند. فرمی استقراء، $P(n)$ عبارت است از:

اگر $n>29$ باشد، آنگاه مجموعه‌ای از سکه‌ها هستند که ارزش آنها n استرانگ است. به یاد داشته باشید که $P(n)$ یک گزاره است. وقتی که پیش فرض‌های یک گزاره غلط باشد، می‌دانیم که کل گزاره صحیح است (با شاخ توی سرم چه کار کنم؟!) در این وضعیت گفته می‌شود که گزاره به انتفاء مقدم صحیح است. بنابر این $P(n)$ به انتفاء مقدم صحیح خواهد بود هرگاه که $n\le 29$

اینک با برهان استقراء جلو می‌رویم:

حالت پایه: $P(0)$ بصورت صحیح است.

حالت استقرائی: در نظر می‌گیریم که $P(i)$ به ازاء تمام $i \leq n$ صادق است و ثابت می‌کنیم که $P(n+1)$ صادق است. به حالاتهای زیر استدلال می‌کنیم:

حالت: $(n+1 \leq 29)$

این حالت به انتفاء مقدم صحیح است.

حالت $(n+1=30)$: $P(30)$: صادق است زیرا اهالی ایندکتیا می‌توانند از پنج سکهٔ $6S$ استفاده کنند.

حالت $(n+1=31)$: از یک سکهٔ $6S$ ،یک سکهٔ $10S$ و یک سکهٔ $15S$ استفاده کنید.

حالت $(n+1=32)$: از دو سکهٔ $6S$ و دو سکهٔ $10S$ استفاده کنید.

حالت $(n+1=33)$: از سه سکهٔ $6S$ و یک سکهٔ $15S$ استفاده کنید.

حالت $(n+1=34)$:از چهار سکه $6S$ و یک سکهٔ $10S$ استفاده کنید.

حالت $(n+1=35)$: از دو سکهٔ S و یک سکهٔ $15S$ استفاده کنید.

حالت $(n+1>35)$: پس $n \geq (n+1)-6 > 29$ بنابر این بوسیلهٔ فرضیهٔاستقراء قوی، اهالی ایندکتیا می‌توانند برای $S((n+1)-6)$ تغییر ایجاد کنند. حالا با افزودن یک سکهٔ $6S$، می‌توانند برای $S(n+1)$ تغیر لازم را ایجاد کنند. بنابر این در هر حالت، $P(n+1)$ صحیح است و می‌توانیم نتیجه بگیریم که با استقراء قوی که به ازاء تمام $n > 29$، اهالی ایندکتیا می‌توانند برای nS تغیر بوجود بیاورند.

به خاطر داشته باشید که همانطور که با مورد ال شکل سر و کار داشتیم، این برهان هم یک روش تکراری را برای ایجاد تغییر حاصل می‌کند. در واقع، حتی بیشتر نشان می‌دهد: اهالی ایندااکتیا می‌توانند برای هر مبلغ بزرگتر از ۲۹S با استفاده از فقط یک سکهٔ ۱۵S، حداکثر دو سکهٔ ۱۰S و تعدادی سکهٔ ۶S تغییر ایجاد کنند.

٤. ۳ جداسازی

یک بازی مهیج دیگر ٦.٠٤٢ که مطمئناً ملتی را به حرکت درمی‌آورد!

با بسته‌ای از n جعبه شروع می‌کنید. سپس به یک سری حرکات مبادرت بورزید. در هر حرکت، یک دسته را به دو دستهٔ ناتهی تقسیم کنید. بازی وقتی تمام می‌شود که شما n بسته که هر کدام حاوی یک جعبهٔ تکی باشد داشته باشید. برای هر حرکت امتیاز می‌گیرید، اگر یک بسته به اندازه $a+b$ را به دو بسته با اندازه‌های b و a، تقسیم کنید، امتیاز ab را برای آن حرکت کسب می‌کنید. نتیجهٔ نهایی شما میزان جمع امتیازاتی است که برای هر حرکت بدست می‌آورید. چه استراتژی را باید به کار بگیرید تا نتیجهٔ کلی را به حداکثر برسانید؟ به عنوان یک مثال، فرض کنید که با دسته‌ای از $n=۱۰$ جعبه شروع کنیم. سپس ممکن است بازی به روش زیر جلو برود:

نتیجه	ارتفاع بسته‌ها								۱۰
۲۵								۵	۵
٦							۲	۳	$\underline{\text{۵}}$
٤						۱	۲	۳	$\underline{\text{٤}}$
٤					۲	۱	۲	$\underline{\text{۳}}$	۲
۲				۱	۲	۱	۲	۲	$\underline{\text{۲}}$
۱			۱	۱	۲	۱	۲	$\underline{\text{۲}}$	۱
۱		۱	۱	۱	۲	۱	$\underline{\text{۲}}$	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	$\underline{\text{۲}}$	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

امتیار ٤۵= نتیجهٔ کلی

در هر ردیف، بسته‌ای که زیر آن خط کشیده شده در مرحلهٔ بعد تقسیم می‌شود. آیا می‌توانید راه‌برد بهتری بیابید؟

۱. ٤. ۳ تحلیل بازی

بیائید با استفاده از استقراء قوی بازی جداسازی را تحلیل کنیم. ثابت خواهیم کرد که نتیجهٔ امتیازات شما کاملاً بوسیله تعداد جعبه‌ها مشخص می‌شود – راه‌بردتان بی‌ربط است!

قضیه ۲. ۳ هر روش عدم انباشت n شی نتیجه $n(n-۱)/۲$ امتیازی بدست می‌دهد.

چندین نکتهٔ فنی در این برهان وجود دارد که باید به آن اشاره کنیم:

- نمونهٔ متعلق به برهان استقراء قوی درست مثل همان استقراء عادی است
- همانند استقراء عادی، کمی اختیار داریم اندیسها را تعدیل کنیم. در این حالت، در حالت اولیه $p(۱)$ را ثابت می‌کنیم و $p(n-۱),\dots,p(۱)$ مستلزم $P(n)$ به ازاء تمام $n \geq ۲$ در مرحلهٔ استقرائی هستند.

برهان. برهان با استقراء قوی انجام می‌گیرد. فرض کنید که $P(n)$ گزاره‌ای باشد که هر روش عدم انباشت n بلوک نتیجه‌ای معادل $n(n-۱)/۲$بدست می‌دهد.

مرحلهٔ پایه: اگر $n=۱$ باشد، پس فقط یک بلوک وجود دارد. هیچ حرکتی ممکن نیست و به این ترتیب نتیجهٔ کلی برای بازی $۱(۱-۱)/۲=۰$. با این حساب، $P(۱)$ صحیح است.

مرحلهٔ استقرائی: حالا باید نشان دهیم که $P(۱),...P(n-۱)$ همگی صحیح هستند و اینکه ما بسته‌ای از n بلوک داریم.اولین حرکت باید این بسته را به زیر بسته‌هایی به اندازهٔ $n-k, k$ برای تعدادی k بطور معین میان $n, ۰$ تقسیم کند. اینک مجموعهٔکلی بازی حاصل جمع امتیازات است برای این حرکت اول باضافهٔ امتیازهایی که توسط عدم انباشت دو زیر بسته بدست آمده است:

(نتیجهٔاولین حرکت) = نتیجهٔ کلی

(نتیجهٔ عدم انباشت بلوک‌ها k) +

(نتیجهٔ عدم انباشت بلوک‌ها $n-k$)+

$$
\begin{aligned}
&= k(n-k)+\frac{k(k-۱)}{۲}+\frac{(n-k)(n-k-۱)}{۲} \\
&= \frac{۲nk-۲k^۲+k^۲-k+n^۲-nk-n-nk+k^۲+k}{۲} \\
&= \frac{n(n-۱)}{۲}
\end{aligned}
$$

دومین معادله از فرضیه‌های $P(k)$ و $P(n-k)$ استفاده می‌کند و باقی عمل ساده سازی است. این نشان می‌دهد که $P(۱), P(۲),...P(n)$ دلالت می‌کند بر $P(n+۱)$.

۵. اصل خوش ترتیبی

روش دیگر برهان که بسیار به استقراء مرتبط است

اصل خوش ترتیبی. هر زیر مجموعهٔ غیر تهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضو است.

اصل خوش ترتیبی هیچ شباهتی به اصل استقراء ندارد و ممکن است آشکار به نظر بیاید بی‌فایده. ولی به مانند آشکار بودن، بدانید که اگر در این اصل مجموعهٔ اعداد صحیح غیر منفی، $\mathbb{N}$، با مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ (تمام اعداد صحیح) یا مجموعهٔ $\mathbb{Q}^+$ (اعداد گویای مثبت) عوض شود اصل برقرار نخواهد ماند. هیچ کدام از این مجموعه‌ها یک عضو حداقل ندارند.

برای فایده این اصل، بیان می‌کنیم که روش روتینی وجود دارد که هر برهان با استفاده از اصل خوش ترتیبی قابل تبدیل به برهانی با استفاده از اصل استقراء قوی است و بالعکس.

(ما برای تشریح عمل تبدیل وقت را نمی‌گیریم، چون که سخت نیستند.) بنابر این اصل خوش ترتیبی در کلیه برهان‌های قبلی می‌توانست به جای استقراء بکار رود.

در واقع با نگاه به پشت‌سر، بطور ضمنی (تلویحی) به اصل خوش ترتیبی در هفتهٔ دوم یادداشتهایی را که $\sqrt{۲}$ غیر گویا است تکیه کردیم. در آن اثبات فرض می‌کرد که هر عدد گویایی، q، می‌توانست به عنوان کسری در ساده‌ترین (کمترین) حالت نوشته شود، یعنی که $q = m/n$ جایی که n,m بدون هیچ فاکتور مشترکی اعداد صحیح هستند. چطور می‌دانیم که این همیشه ممکن است؟

در ابتدا، می‌توانیم در نظر بگیریم $m \geq ۰$ (در غیر این صورت، جایگزین کنید m/n با $(-m/(-n)$) از اینرو مجموعه اعداد طبیعی، m، که $q = m/n$ برای عدد صحیح، n، برقرار باشد تهی نیست. با این ترتیب، با در نظر گرفتن اصل خوش ترتیبی، باید یک عدد صحیح حداقل $m_۰$، باشد که $q = m_۰/n_۰$ برای عدد صحیح، $n_۰$. حالا اگر $n_۰,m_۰$ یک فاکتور مشترک $P > ۱$

داشته باشد، پس $(m\circ/P)/(n\circ/P)$ راهی دیگر برای بیان q بـه عنـوان خـارج قسـمت اعـداد صحیح خواهد بود. ولی $\circ \le (m\circ/P) < m\circ$ این با کمترین مقدار $m\circ$ در تناقض است.

از خیلی قبل داشتیم آشکارا از اصل خوش ترتیبی استفاده می‌کردیم!

ریاضی‌دانان اغلب از اصل خوش ترتیبی استفاده می‌کنند چون که دارای برهـان‌هـای کوتـاه‌تـر از استقراء است. از سویی دیگر، –اصل خوش ترتیبی نوعاً برهان را با تضاد درگیر می‌کنند، بنابر ایـن استفادهٔ از آن همیشه بهترین راه حل نیست. انتخاب روش، واقعاً سبک مسئله است – ولی سـبک خود، مسئله‌ای است.