فصل هشتم

حاصل جمع‌ها، حاصل ضرب‌ها & مجانبی‌ها

۱. فرمول‌های بسته و تقریبی‌ها

مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌ها بصورت قاعده‌مندی در تجزیه الگوریتم‌ها و دیگر جاهای فنی همچون امور مالی و سیستم‌های احتمالی– آماری نمودار می‌شوند. قبلاً دیدیم که

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

داشتن یک شکل بسته ساده مثل $n(n+1)/2$ حاصل جمع را برای فهمیدن و ارزیابی کردن آسان تر می‌کند. ما بوسیله استقراء ثابت کردیم که این فرمول صحیح است، ولی نگفتیم از کجا مـی‌آیـد. در بخش ۴، درباره روشهای پیدا کردن چنین شکل‌های بسته‌ای بحث خواهیم کرد. حتی وقتی که اشکال بسته‌ای دقیقاً برابر با یک حاصل جمع وجود نداشته باشد. همچنان ممکن است بتوانیم یک شکل بسته تقریبی به یک حاصل جمع با کارآمدی مفید پیدا کنیم.

حاصل ضربی که در این یادداشت‌ها بر آن متمرکز می‌شویم همان فاکتوریل و آشناست که:

$$n! ::= 1.2 \ldots (n-1).n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

یک شکل بسته تقریبی به نام فرمول استرلینگ برای آن شرح خواهیم داد.

سرانجام، وقتی که شکل بسته تقریبی برای یک گزاره وجود نداشته باشد، ممکن است شکل بسته‌ای که میزان رشدش را مشخص کند وجود داشته باشد. ما نماد نویسی مجانبی را، به عنوان "شگفتی بزرگ" برای توضیح میزان رشد، معرفی خواهیم کرد.

۲. ارزش حقوق سالانه

آیا مایلید همین امروز یک میلیون دلار گیرتان بیاید یا سالانه پنجاه هزار دلار برای بقیه عمرتان را ترجیح می‌دهید؟ از یک سو، خشنودی آنی خوب چیزی است. از سوی دیگر، اگربه مدت طولانی زندگی کنید مجموع دلارهایی که در k سال، $\$۵۰K$ دریافتی‌تان باشد خیلی بیشترمی‌شود.

به شکلی رسمی، این پرسش است که درباره حقوق سالانه مطرح می‌شود. حقوق سالانه یک ابزار مالی است که مبلغی پول ثابت در آغاز هر سال به تعداد سال مشخص پرداخت می‌شود. بخصوص، یک $n-$ سال $m-$ پرداختی حقوق سالانه m دلار در آغاز هر سال به مدت n سال . در بعضی از موارد، n متناهی است، ولی همیشه اینطوری نیست.

مثال‌هایی در این باره شامل تسویه حساب‌های بخت‌آزمائی، وام‌های دانشجویی و قسط‌بندی کردن خانه است. حتی مردمانی وال استریت صفت هم هستند که تخصص‌شان در تجارت با حقوق سالانه است.

یک پرسش کلیدی این است که حقوق سالانه چقدر می‌ارزد. برای مثال، موسسه‌های بخت‌آزمایی در طول سالیان دراز جک پات‌ها را خالی می‌کنند. بطور ذاتی، ۵۰/۰۰۰ دلار سالانه به مدت ۲۰

سال باید ارزش کمتر از یک میلیون دلار در حال حاضر داشته باشد. اگر تمام پول نقد را در آن واحد داشتید، می‌توانستید آن را در سرمایه گذاری بکار بگیرید و بهره برداری از آن را شروع می‌کردید. ولی چه می‌شد اگر انتخاب میان ۵۰,۰۰۰$ دلار سالانه به مدت ۲۰ سال و مبلغ نیم میلیون دلار همین امروز بود؟ حالا دیگر روشن نیست کدام گزینه بهتر است.

به منظور پاسخ به چنین پرسش‌هایی، باید بدانیم دلاری که در آینده پرداخت می‌شود امروز چه بهایی دارد. برای ساختن نمونه، فرض کنیم که پول را می‌توان در یک نرخ بهره ثابت p سرمایه گذاری کرد. ما نرخ تورم را ۸٪ را برای بقیه بحث در نظر خواهیم گرفت.

اینجاست که پی می‌بریم چرا نرخ بهره مهم است. امروز که ده دلار در نرخ بهره (تورم) p سرمایه گذاری شود به این صورت در خواهد آمد $(۱+p).۱۰=۱۰.۸۰$ در طول یک سال، و در مدت دو سال $(۱+p)^۲.۱۰\approx۱۱.۶۶$ و الی آخر. به طریقی دیگر که نگاه کنیم، اگر از حالا به مدت یک سال ده دلار پرداخت شود در واقع ارزش برابر با $۱/(۱+p).۱۰\approx۹.۲۶$ دلار امروز خواهد بود. دلیلش این است که اگر ما امروز ۹.۲۶$ داشته باشیم، می‌توانیم آنرا سرمایه گذاری کنیم و در مدت یک سال ۱۰.۰۰$ به هر شکل در بیاوریم. بنابراین، p ارزش پول پرداختی در آینده را تعیین می‌کند.

۱. ۲ ارزش آینده پول

هدف ما تعیین ارزش حقوق سالیانه‌ای به مدت $n-$ سال و $m-$ پرداخت است. اولین پرداخت m دلار واقعاً m دلار می‌ارزد. ولی دومین پرداخت در سال بعد فقط $m/(۱+p)$ دلار می‌ارزد.

همینطور هم، پرداخت سوم $m/(1+p)^2$ و nامین پرداخت فقط $m/(1+p)^{n-1}$ دلار می‌ارزد. ارزش کل V حقوق سالانه با حاصل جمع ارزشهای پرداختی برابر است. این یعنی که:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{(1+p)i-1}$$

برای محاسبه ارزش واقعی حقوق سالانه، باید این حاصل جمع را محاسبه کنیم. یک راه جایگذاری مقادیر p,m,n، است، محاسبه هر عبارت به وضوح، و آنها را با هم جمع کردن است. با این حال، این حاصل جمع یک شکل بسته ویژه دارد که کار را آسان‌تر می‌کند. (عبارت "شکل بسته" به یک گزاره ریاضی بدون هیچ مجموعیابی یا نماد حاصل‌ضرب ارجاع می‌دهد). ابتدا، اجازه بدهید مجموعیابی را با چندین جایگزین قشنگ‌تر کنیم.

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{(1+p)^{i-1}}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{m}{(1+p)j} \quad (\text{جایگزین } j=i-1)$$

$$=m\sum_{j=0}^{n-1}x^j \quad (\text{جایگزین } x=\frac{1}{1+p})$$

هدف از این جایگزین‌ها قرار دادن مجموعیابی به شکلی ویژه است تا اینکه بتوانیم آن را با قضیه ارائه شده در بخش بعدی محکم کنیم.

۲.۲ حاصل جمع‌های هندسی

قضیه ۱. ۲ برای همه $n\geq 1$ و تمام $x\neq 1$،

$$\sum_{i=0}^{n-1}x^i=\frac{1-x^n}{1-x}$$

مجموعیابی در این قضیه مجموع هندسی است. شکل قابل تشخیص دهنده یک مجمـوع هندسـی به این صورت است که هر کدام از عبارت‌ها

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}$$

در مجموع به دفعات ثابت که در دفعه قبل ۱ است و در این مورد، x ثابت است.

قضیه یک شکل بسته برای مجموع هندسی بدست می‌دهد که با ۱ شروع می‌شود.

پیش از این در درس‌هایمان درباره استقراء یک برهان از این قضیه را دیدیم. همانطور که در اغلب موارد، برهان استقراء هیچ ردپایی از اینکه در مکان اول فرمول چطور پیدا شده است ارائه نمی‌کند. اینجا اشتقاقی روشن‌گرانه‌تر داریم. راه حل این است که فرض کنیم s مقدار مجموع باشد و بعـد مشاهده کنیم $-xS$ چی است:

$$s = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}$$

$$-xs = -x - x^2 - x^3 - \ldots - x^{n-1} - x^n.$$

جمع این دو معادله می‌دهد:

$$S - xS = 1 - x^n,$$

بنابراین

$$S = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

درباره فرمول‌های مجموع‌یابی (در مقابل اثبات صرف) بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۳. ۲ بازگشت دوباره مسئله حقوق سالانه

حالا می‌توانیم مسئله قیمت گذاری حقوق سالانه را حل کنیم. ارزش حقوق سالانه که m دلار در شروع هر سال به مدت n سال می‌پردازد به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$V = m\sum_{i=0}^{n-1} x^j$$

$$= m\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$= m\frac{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^n}{1-\frac{1}{1+p}}$$

$$= m\frac{1+p-\left(\frac{1}{1+p}\right)^{n-1}}{p}.$$

خط اول بیان دوباره مجموعیابی حاصله از ارزش حقوق سالانه است کـه پـیش از ایـن بدسـت آوریم. خط دوم از فرمول شکل بسته برای مجموع هندسی استفاده می‌کند.

در خط سوم، جایگزینی قبلی را انجام می‌دهیم $x = 1/(1+p)$ در مرحله پایـانی، هـر دو صـورت کسر و مخرج کسر ضرب در $1+p$ شده‌اند تا گزاره را ساده کند.

استفاده از فرمول نتیجه‌گیری خیلی آسان‌تر از مجموعیابی با یک دو جین عبارت است. برای مثال، ارزش واقعی یک بلیط برنده بخت آزمایی که هر سال ۵۰,۰۰۰$ دلار به مدت ۲۰ سـال پرداخـت کند چقدر است؟ جدا کردن $m = \$50{,}000, n = 20$ و $p = 0.08$ می‌دهد $V \approx \$530{,}180$. چون که

پرداخت‌ها به تعویق می‌افتند، آن یک میلیون دلار واقعاً فقط نیم میلیون دلار ارزش دارد. ترفند خوبی برای مبلغین بخت آزمایی است.

٤. ۲ سری‌های هندسی نامتناهی

پرسشی که در ابتدا این بخش مطرح شد این بود که آیا مایلید امروز یک میلیون دلار بگیرید یا پنجاه هزار دلار در یک سال برای باقی مانده عمر خود. البته، بستگی به این دارد که چقدر زندگی کنید، بنابراین از روی خوش بینی فرض کنید که گزینه دوم دریافت سالی پنجاه هزار دلار مادام العمر است. انگار شبیه پولی پایان ناپذیر است!

می‌توانیم ارزش حقوق سالانه را با تعداد نامتناهی پرداخت‌ها با حد گرفتن مجموع هندسی‌مان در قضیه ۱. ۲ به طوری که n نامتناهی باشد، حساب کنیم. این ارزش به خاطر سپردن را دارد.

قضیهٔ ۲. ۲ اگر $|x|<۱$ آنگاه

$$\sum_{i=۰}^{\infty} x^i = \frac{۱}{۱-x}.$$

برهان.

$$\begin{aligned}\sum_{i=۰}^{\infty} x^i &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=۰}^{n-۱} x^i \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{۱-x^n}{۱-x} \\ &= \frac{۱}{۱-x}.\end{aligned}$$

تساوی اول برآمده از تعریف یک مجموعیابی نامتناهی است. در سطر دوم از، فرمول مجموع یک مجموع عبارت هندسی n جمله‌ای که در قضیه ۱. ۲ آمد بهره می‌بریم. خط پایانی با ارزیابی حد انجام می‌گیرد؛ از آنجا که درنظر گرفتیم $|x|<۱$ جمله x^n ناپدید می‌شود.

در مسئله حقوق سالانه، $x=۱/(۱+p)<۱$ ، بنابراین قضیه کاربرد دارد. با جایگزین کردن x، ما ارزش حقوق سالانه را بدست می‌آوریم

$$V = m\frac{۱}{۱-x}$$

$$= m\frac{۱}{۱-۱/(۱+p)}$$

$$= m\frac{۱+p}{(۱+p)-۱}.$$

$$= m\frac{۱+p}{p}$$

تقسیم کردن (جداسازی) $m=\$۵۰,۰۰۰$ و $p=۰.۰۸$ فقط $۶۷۵,۰۰۰\$$ را به دست می‌دهد. در کمال شگفتی، یک میلیون دلار امروز خیلی بیشتر از $۵۰,۰۰۰\$$ دلار هر سال برای همیشه است! پس دوباره، اگر یک میلیون دلار امروز توی بانک با سود ۸٪ داشتیم، می‌توانستیم از حساب برداشت کرده و هشتاد هزار دلار برای هر سال در تمام عمر خرج کنیم. بنابراین پاسخ کمی معنادار می‌شود.

۵. ۲ مثال‌ها

اکنون ما فرمول‌های شکل بسته برای مجموع هندسی و سری‌ها را داریم.

در زیر تعدادی مثال آورده شده‌اند. در هر مورد، راه حل بلافاصله یا از قضیه ۱. ۲ (برای مجموع‌های متناهی) یا اینکه از قضیه ۲. ۲ (برای سری های نا متناهی) در پی می‌آید.

$$۱+۱/۲+۱/۴-۱/۸+\ldots=\sum_{i=۰}^{\infty}\left(۱/۲\right)^{i}=\frac{۱}{۱-\left(۱/۲\right)}=۲ \qquad (۱)$$

$$۰.۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹\ldots=۰.۹\sum_{i=۰}^{\infty}\left(۱/۱۰\right)^{i}=۰.۹\frac{۱}{۱-۱/۱۰}=۰.۹\frac{۱۰}{۹}=۱ \qquad (۲)$$

$$۱-۱/۲+۱/۴-۱/۸+\ldots=\sum_{i=۰}^{\infty}\left(-۱/۲\right)^{i}=\frac{۱}{۱-\left(-۱/۲\right)}=۲/۳ \qquad (۳)$$

$$۱+۲+۴+۸\ldots+۲^{n-۱}=\sum_{i=۰}^{n-۱}۲^{i}=\frac{۱-۲^{n}}{۱-۲}=۲^{n}-۱ \qquad (۴)$$

$$۱+۳+۹+۲۷+\ldots+۳^{n-۱}=\sum_{i=۰}^{n-۱}۳^{i}=\frac{۱-۳^{n}}{۱-۳}=\frac{۳^{n}-۱}{۲} \qquad (۵)$$

اگر عبارت‌های موجود در مجموع هندسی یا سری‌ها کوچکتر شوند مانند معادله (۱)، آنگاه به مجموع از نظر هندسی نزولی گفته می‌شود.

اگر عبارت‌های موجود در مجموع هندسی به تدریج بزرگتر شوند، مانند (۴) و (۵)، آنگاه به مجموع از نظر هندسی صعودی می‌گویند.

اینجا یک قاعده عملی خوب وجود دارد: یک مجموع یا سری هندسی بطور تقریبی برابر است با بزرگ‌ترین قدر مطلق جملات سری. در معادله‌های (۱) و (۳)، بزرگترین جمله برابر با ۱ است و مجموع‌ها ۲ و ۲/۳ هستند، که هر دو نسبتاً نزدیک به ۱ می‌باشند. در معادله (۴) مجموع تقریباً دو برابر بزرگترین جمله است. در معادله آخری (۵) بزرگترین جمله $۳^{n-۱}$ است و مجموع $(۳^{n}-۱)/۲$ است، که فقط در حدود ۱.۵ برابر بزرگ‌ترین جمله است.

۲.٦ مجموع‌های وابسته

همه چیز را درباره مجموع هندسی می‌دانیم. ولی در عمل غالباً با مجموع مواجه می‌شویم که نمی‌توانند با جایگزین‌های متغیر ساده به شکل $\sum x^i$ تبدیل شود.

یک راه غیر علنی، ولی مفید برای بدست آوردن فرمول‌های جدید مجموعیابی از روش‌های قدیمی روش مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری با توجه به x است. به عنوان یک مثال، مجموع زیر را ملاحظه کنید:

$$\sum_{i=۱}^{n} ix^i = x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + \ldots + nx^n$$

این یک مجموع هندسی نیست، از آن رو که نسبت میان عبارت‌های متوالی ثابت نیست. فرمول ما برای مجموع یک مجموع هندسی را مستقیماً نمی‌توان به کاربرد. ولی فرض کنید ما آن فرمول را دیفرانسیل بگیریم:

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=۰}^{n} xi = \frac{d}{dx}\frac{۱-x^{n+۱}}{۱-x}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} ix^{i-۱} = \frac{-(n+۱)x^n(۱-x)-(۱)\left(۱-x^{n+۱}\right)}{(۱-x)^۲}$$

$$= \frac{-(n+۱)x^n + (n+۱)x^{n+۱} + ۱ - x^{n+۱}}{(۱-x)^۲}$$

$$= \frac{۱-(n+۱)x^n + nx^{n+۱}}{(۱-x)^۲}.$$

اغلب هر دیفرانسیل‌گیری یا انتگرال‌گیری توان x را در هر عبارت به هم می‌زند.

در این مورد، اینک یک فرمول برای مجموع شکل $\sum ix^{i-1}$ داریم، ولی یک فرمول برای سری‌های $\sum ix^i$ می‌خواهیم. حل ساده است: ضرب x نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

از آن‌جایی که می‌توانستیم به سادگی اشتباه کنیم، فکر خوبی است که برگردیم و فرمولی که از این راه بدست آمده را با یک برهان استقراء معتبر سازیم.

توجه داشته باشید که اگر $|x|<1$، آنگاه این سری‌ها به یک مقدار همگرا می‌شوند حتی اگر بطور نامتناهی عبارت وجود داشته باشد.

گرفتن حد که n به بی‌نهایت میل می‌کند قضیه زیر را بدست می‌دهد:

قضیه ۳. ۲ اگر $|x|<1$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

به عنوان یک نتیجه، فرض کنید یک حقوق سالانه است که im دلار در پایان هر سال i مادام العمر پرداخت می‌کند. برای مثال، اگر $m=\$50{,}000$، پس پرداخت قسط‌ها ۵۰,۰۰۰$ وبعد ۱۰۰,۰۰۰$ و بعد ۱۵۰,۰۰۰$ و به همین ترتیب خواهد بود.

قبول اینکه ارزش این حقوق سالانه متناهی باشد سخت است! ولی با استفاده از قضیه پیش گفته می‌توانیم این ارزش را محاسبه کنیم:

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{im}{(1+p)^i}$$

$$= m \frac{\frac{۱}{۱+p}}{(۱-\frac{۱}{۱+p})^{۲}}$$

$$= m \frac{۱+p}{p^{۲}}.$$

خط دوم با کاربری قضیه ۳. ۲ دنبال می‌شود. خط سوم از ضرب صورت کسر و مخرج کسر در $(۱+p)^{۲}$ بدست می‌آید.

برای مثال اگر $m = \$۵۰۰,۰۰۰$ و $p = ۰.۰۸$ به طور معمول، آنگاه ارزش حقوق سالانه $V = \$۸,۴۳۷,۵۰۰$ می‌شود. حتی در این صورت پرداخت‌ها هر سال افزایش می‌یابد، افزایش فقط با زمان بالا رونده است، دلارهایی که در آینده پرداخت می‌شوند به طوری توانی در زمان (با گذشت زمان) کاهش می‌یابند.

کاهش هندسی افزایش مضاف را فرو می‌برد. پرداخت‌های قسطی (ماهانه) در زمان آینده تقریباً بی‌ارزش می‌شوند، بنابراین ارزش حقوق سالانه متناهی است.

موضوع مهمی که باید به خاطر سپرد این است که راه، گرفتن مشتق (یا انتگرال) از فرمول یک مجموع است. البته، این تکنیک کسی را می‌خواهد که مشتق‌های نا مطبوع را به درستی محاسبه کند، ولی حداقل این کار از نظر تئوری ممکن است!

۳. کتاب چینی

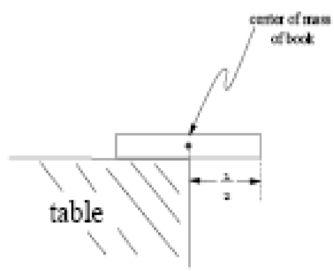
فرض کنید که توده‌ای کتاب دارید و می‌خواهید آنها را روی میز بچینید با این روش که مرکز آن طوری باشد که کتاب بالایی به کتابهای زیرین تماس داشته باشد (بچسبد).

فکر می‌کنید چه میزان از لبه میز که گذشته باشد می‌توانید کتاب بالایی را نگه دارید بدون آنکه توده کتاب فرو بریزد؟ آیا کتاب بالایی می‌تواند کاملاً در آن سوی لبه میز خود را نگه دارد؟

اولین جواب اکثر مردم به این سئوال – گاهی هم دومین و سومین جواب آنها، "نه، کتاب بالایی هرگز به طور کامل از لبه میز بیرون نمی‌زند" است. ولی در واقع، می‌توانید کتاب بالایی را هر چقدر که می‌خواهید به بیرون هدایت کنید: یک طول کتاب، دو طول کتاب، هر تعداد طول کتاب!

۱. ۳ شکل دادن به مسئله

ما این مسئله را به صورت بازگشتی مورد نظر قرار خواهیم داد. چه مسافتی که از لبه میز دور شویم می‌توانیم یک کتاب را متصل به میز نگه داریم؟ مادامی که مرکز جرم آن روی میز باشد پائین نمی‌ریزد، بنابراین می‌توانیم تا نیمی از طولش را از لبه میز خارج کنیم، همان طور که در شکل (تصویر) ۱ نمایش داده شده است:



تصویر ۱: یک کتاب می‌تواند به اندازه نیم طول کتاب بر فراز آویز شود.

حالا تصور کنید توده‌ای کتاب داریم که متصل به لبه میز چسبیده باشند بدون اینکه فرو بریزند–آن را توده ثابت بنامید. بیائید فرا آویز (فرا آونگ) توده ثابت را به صورت بزرگترین مسافت از کانون (مرکز) جرم توده کتاب به دورترین لبه کتاب تعیین کنیم. اگر مرکز جرم توده ثابت را به مانند

شکل ۲ در لبه میز قرار بدهیم، همان میزانی است که می‌توانیم یک کتاب را در انبوه بـه خـارج از لبه میز نگه داریم.

بنابراین فرمولی برای بیشترین فرا آونگ ممکن می‌خواهیم، B_n، که با تـوده‌ای از n کتـاب قابـل دسترس باشد.

تصویر ۲: فرا آونگ لبه میز

قبلاً مشاهده کردیم که فرا آونگ یک کتاب ۱/۲ طول کتاب است. یعنی اینکـه حـالا فـرض کنیـد توده ثابتی $n+1$ کتاب با بیشترین فرا آونگ داریم. اگر فرا آونگ n کتاب در بالای کتاب زیـرین به حداکثر نمی‌رسید، می‌توانستیم یک کتاب را با جابجایی دسـته کتـاب بـالایی بـا دسـته‌ای از n کتاب با فرا آونگی بزرگتر به پیش ببریم. بنابراین حداکثر فرا آونـگ، B_{n+1}، متعلـق بـه تـوده‌ای از $n+1$ کتاب با جابجایی یک توده ثابت فرا آونگ حداکثر از n کتاب در بالای انتهای کتاب زیرین بدست می‌آید و بزرگترین فرا آونگ را برای توده‌ای از $n+1$ کتـاب بـا قـراردادن مرکـز جـرم n کتاب درست بالای لبه کتاب زیرین به مانند تصویر ۳ بدست می‌آوریم.

بنابراین می‌دانیم $n+۱$ کتاب را کجا قرار دهیم تا بیشترین فرا آونگ را بدست آوریم و همه کاری که باید انجام دهیم این است که آنچه هست را محاسبه کنیم. ساده‌ترین روش برای انجام آن کار این است که جرم n کتاب فوق را به عنوان اصل در نظر بگیریم.

در آن روش مختصه افقی مرکز جرم همه توده $n+۱$ کتاب با افزایش فرا آونگ برابری خواهد کرد. ولی حالا مرکز جرم کتاب زیرین مختصه افقی ۱/۲ دارد، بنابراین افقی مرکز جرم همه توده کتاب $n+۱$ می‌شود

$$\frac{\circ\times n+\frac{۱}{۲}\times ۱}{n+۱}=\frac{۱}{۲(n+۱)}$$

به عبارت دیگر،

$$B_{n+۱}=B_n+\frac{۱}{۲(n+۱)} \qquad (۶)$$

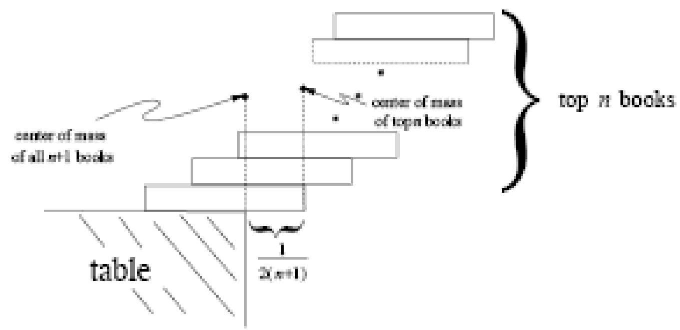
همانطور که در تصویر ۳ نشان داده شده است.

با گسترش معادله (۶)، داریم

$$B_{n+۱}=B_{n-۱}+\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۲(n+۱)}$$

$$=B_۱+\frac{۱}{۲.۲}+\ldots+\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۲(n+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n+۱}\frac{۱}{i}.$$



تصویر ۳: فرا آونگ اضافی با $n+1$ کتاب

تعریف

$$H_n ::= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

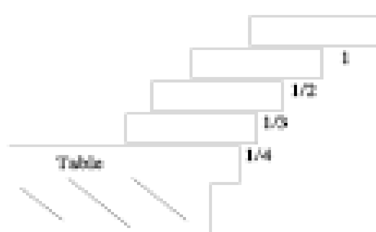
به H_n عدد توافقی بی نهایت $n-$ مولفه می‌گویند، و همین تازگی نشان دادیم که

$$B_n = \frac{Hn}{2}.$$

محاسبه نخستین اعداد توافقی ساده است. برای مثال،

$$H_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}., H_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}, H_2 = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

این حقیقت که H_4 بزرگتر از ۲ است، معنی خاصی دارد، آن دلالت دارد بر گسترش کلی ۴کتاب بیش از یک کتاب کامل است! این وضعیت در تصویر ٤ نمایش داده شده است.



تصویر ٤ : توده چهار کتابی با بیشترین فرا آونگ.

در بخش بعدی ثابت خواهیم کرد که H_n به آرامی ولی به طور بی‌کران با n رشد می‌کند معنایش این است که می‌توانیم تا هر مسافتی کتاب‌ها را با گذر از لبه میز با انباشتن آنها روی یکدیگر فـرا آویز کنیم.

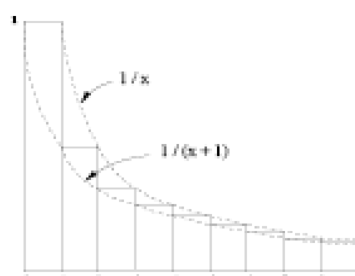
٢. ٣ محاسبه مجموع– روش انتگرال

پاسخ دادن به پرسش‌هایی نظیر "چند عدد کتاب مورد نیاز است تا تـوده‌ای بـه میـزان طـول ١٠٠ کتاب به آن سوی میز برسد؟" خوب است.

یک پاسخ به این پرسش این است که تا یک رقم مانده به ٢٠٠ به شمردن ادامه بدهیم. با این حال، همانطور که خواهیم دید، چنان ایده برائی هم نیست.

چنین پرسش‌هایی آرام می‌گرفتند اگر می‌توانستیم H_n را دریک شکل بسته عنوان کنیم. متأسـفانه، هیچ شکل بسته‌ای شناخته شده نیست و احتمالاً هم وجود ندارد. به عنوان بهترین راه دوم؛ با ایـن همه با استفاده از روش انتگرال می‌توانیم شکل‌های بسته برای تقریب به H_n پیدا کنیم.

ایده روش انتگرال‌گیری تعیین عبارت‌های مجموع بالا و پایین به وسیله تابع‌های ساده شبیه آنچـه در تصویر ٥ آمده، است. انتگرال‌های این توابع آنگاه مقدار مجموع بالا و پایین را تعیین کنند.



تصویر ۵: این تصویر روش انتگرال را برای تعیین مجموع شرح می‌دهد.

منطقه زیر "پلکان مرحله" (یا مرحله پلکان بازه $[\circ, n]$ برابر است با $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$. تابع $1/x$ در هر کجا بزرگتر یا برابر است با مرحله پلکانی وبنابر این انتگرال $1/x$ که دراین محدوده یک کران بالا برای مجموع است. همین طور هم، $1/(x+1)$ در همه جا کمتر یا برابر است با مرحله پلکانی و بنابراین انتگرال $1/(x+1)$ یک کران پایین برای حاصل جمع است.

روش انتگرال‌گیری ادامه کران‌های بالا و پایین را در عدد توافقی H_n را به دست می‌دهد:

$$H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + ln \quad n$$
$$H_n \geq \int_\circ^n \frac{1}{x+1} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = ln(n+1) \qquad (7)$$

این جهش‌ها دلالت می‌کنند که عدد توافقی H_n حدوداً نزدیک با $ln\, n$ است.

از آن رو که $ln \quad n$ بدون کران بزرگ می‌شود، اگر چه به آهستگی، می‌توانیم توده‌ای کتاب که به طور دلخواه به دور دست‌ها گسترش یابند، درست کنیم.

برای مثال، برای ساختن توده‌ای سه کتابی که از میز بیرون بروند، به تعدادی n کتاب نیاز داریم تا اینکه $H_n \geq 6$. توان‌گیری از نامساوی‌های بالا نتیجه پائین را به دست می‌دهد.

$$e^{H_{n-1}} \leq n \leq e^{H_n} - 1$$

این دلالت می‌کند بر اینکه ما چیزی حدود (ما بین) ۱۴۹ و ۴۰۲ کتاب نیاز خواهیم داشت. محاسبه فعلی H_n نشان می‌دهد که ۲۲۷ کتاب حداقل تعدادی خواهد بود تا طول سه کتاب فرا آونگ شوند.

۳. ۳ درباره اعداد توافقی بیشتر بدانیم.

دربخشی که گذشت، نشان دادیم که H_n حدوداً $ln\,n$ است. یک تقریب باز هم بهتر شناخته شده:

$$H_n = ln\,n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}\frac{\varepsilon(n)}{120n^4}$$

در اینجا y مقداری برابر با ۰.۵۷۷۲۱۵۶۶۴۰۰۰ است که ثابت اویلر نامیده می‌شود و $\varepsilon(n)$ بین ۰,۱ برای تمام n است. این فرمول را ثابت نخواهیم کرد.

کوتاه نویسی $H_n \sim ln\,n$ برای خاطر نشان کردن این است که عبارت پیشرو H_n، $ln\,n$ است. به طور مشخص‌تر:

تعریف ۱. ۳ برای تابع‌های $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، می‌گوئیم که f مجانباً با g برابر است، در نمادها

$$f(x) \sim g(x)$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$$

همچنین می‌توانیم بنویسیم $H_n \sim ln\,n + \gamma$ تا دو عبارت رهنمون را خاطر نشان کنیم. در حالی که این شماره نویسی بطور گسترده‌ای مورد استفاده است، واقعاً صحیح نیست.

با مراجعه به تعریف □، می‌بینیم که در این حال $H_n \sim ln\,n + \gamma$ عبارتی درست است، همینطور هم $H_n \sim ln\,n + c$ چنین است جایی که c هر ثابتی می‌تواند باشد. روش درست نشان دادن y بزرگترین عبارت دوم $H_n \sim ln\,n + \gamma$ است.

این دلیل که نمادنویسی □ مفید است این است که اغلب به عبارت‌های ترتیب پـائین‌تـر اهمیـت نمی‌دهیم. برای مثال اگر $n=۱۰۰$، پس می‌توانیم $H(n)$ را با دقـت زیـاد فقـط بـا اسـتفاده از دو عبارت راهنمایی محاسبه کنیم:

$$\left|Hn - ln\,n - y\right| \leq \left|\frac{۱}{۲۰۰} - \frac{۱}{۱۲۰۰۰۰۰} + \frac{۱}{۱۲۰.۱۰۰^{۴}}\right| < \frac{۱}{۲۰۰}$$

٤. در جستجوی فرمول‌های مجموعیابی

منبع فرمول ساده $\sum_{i=۱}^{n} i = n(n+۱)/۲$ همچنان یک راز است!

حتماً، می‌توانیم این گزاره را به کمک استقراء ثابت کنیم، ولی گزاره سـمت راسـت از کجـا آمـد. حتی فرمول مجموعیابی برای مجذورهای متوالی قابل توضیح‌تر است:

$$\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} = \frac{(۲n+۱)(n+۱)n}{۶}$$

$$= \frac{n^{۳}}{۳} + \frac{n^{۲}}{۲} + \frac{n}{۶}$$

$$\square\ \frac{n^{۳}}{۳}$$

در اینجا این را که چگونه می‌توانیم مجموع فرمول‌های مجذورها را پیدا کنیم آمده است. اگـر کـه فراموش کرده یا اصلاً آن را ندیده باشیم. ابتدا، روش انتگرال برآوردی سـریع از مجمـوع بدسـت می‌دهد:

$$\int_{۰}^{n} x^{۲} dx \leq \sum_{i=۱}^{n} i^{۲} \leq \int_{۰}^{n} (x+۱)^{۲}\, dx$$

$$\frac{n^3}{3} \le \sum_{i=0}^{n} i^2 \le \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

این کران‌های بالا و پائینی که با روش انتگرال بدست آمده‌اند نشان می‌دهد که $\sum_{i=1}^{n} i^2 \approx \frac{n^3}{3}$. برای بدست آوردن فرمول دقیق، پس از آن می‌توانیم شکل کلـی حـل را حـدس بـزنیم. هـر کجـا کـه نامطمئن باشیم، می‌توانیم پارامترهای $a,b,c\ldots$، را اضافه کنیم. برای مثال، می‌توانیم این حدس را بزنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

اگر حدس صحیح باشد، آنگاه می‌توانیم پارامترهای a,b,c,dرا با مربوط ساختن چند مقدار برای n تعیین کنیم. همچنین هر مقدار یک معادله خطی در a,b,c,dبدست می‌دهد. اگر مقدار کـافی، n را مقدار دهیم، ممکن است یک سیستم خطی با یک حل بی نظیر بدست آوردیم. با بکار بستن این روش در مثال‌هایمان اینها بدست می‌آیند:

$$n = 0 \rightarrow 0 = d$$

$$n = 1 \rightarrow 1 = a + b + c + d$$

$$n = 2 \rightarrow 5 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$n = 3 \rightarrow 14 = 27a + 9b + 3c + d.$$

حل کردن این سیستم این راه حل را بدست می‌دهد $a = 1/3, b = 1/2, c = 1/6, d = 0$ بنـابراین، اگـر حـدس اولیـه مـا دربـاره شـکل راه حـل درسـت باشـد، آن گـاه مجموعیـابی برابـر اسـت بـا

$n^3/3+n^2/2+n/6$. در واقع ، حدس اولیه ما صحیح بود، این فرمول صـحیح مجمـوع مجـذورها است!

مواظب باشید! بعد از بدست آوردن فرمولی با این روش، باز گردیـد و بـا اسـتفاده از اسـتقراء یـا تعدادی روش دیگر آن را ثابت کنید. این فقط یک بررسی برای خط‌های جبری نیست؛ اگر حدس اولیه در راه حل شکل صحیح نبود، آنگاه فرمول نتیجه‌گیری به صورت کامل غلط خواهد بود!

۱. مجموع‌های مضاعف

گاهی وقت‌ها مجبوریم مجموع مجمـوع را ارزیـابی کنـیم، در ایـن صـورت، بـه آن مجموعیـابی مضاعف می‌گویند. گاهی وقتها آسان است: می‌توانیم مجموع درونـی را ارزیـابی کنـیم (محاسـبه کنیم) آن را با شکل بسته جا به جا کنیم، و سپس مجموع بیرونی را محاسبه کنیم کـه دیگـر هـیچ مجموعیابی درون خود ندارد.

ولی یک ترفند وجود دارد که اغلب به طـور زیـادی بـرای مجمـوع‌هـا مفیـد اسـت، کـه ترتیـب مجموعیابی را دگرگون می‌کند. در بهترین شکل با مثال بـه تصـویر در آمـده اسـت. فـرض کنیـد می‌خواهیم مجموع اعداد توافقی را محاسبه کنیم

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 1/j$$

برای درکی درباره این مجموع، می‌توانیم روش انتگرال را به کار ببریم:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k \approx \int_1^n \ln x \quad dx \approx n \quad \ln n - n.$$

حالا بیائید به دنبال پاسخی دقیق بگردیم. اگر داریم درباره زوج‌های (k, j) فکر می‌کنیم، که روی آنها داریم مجموعیابی می‌کنیم، آنها تشکیل یک مثلث می‌دهند:

	j=1	2	3	4	5	…	n
k 1	1						
2	1	1/2					
3	1	1/2	1/3				
4	1	1/2	1/3	1/4			
…							
n	1	1/2		…			1/n

مجموعیابی بالا مجموع هر سطر را حساب می‌کند و بعد مجموع سطر را جمع می‌کند. در عوض، می‌توانیم ستون‌ها را جمع کنیم و بعد جمع ستون‌ها را پیدا کنیم. با بررسی آن جدول می‌بینیم کـه این جمع مضاعف را می‌توان این‌گونه نوشت:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} 1/j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 1/j \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1/j \sum_{k=j}^{n} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(n-j+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j} \\
&= (n+1)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} 1
\end{aligned}
$$

$$= (n+1) H_n - n. \qquad (8)$$

۲. تقریب استرلینگ

نمادنویسی آشنای، $n!$، کوتاه نویسی حاصل‌ضرب پائین است

$$\prod_{i=1}^{n} i .$$

این به مراتب عمومی‌ترین حاصل‌ضرب موجود در ریاضیات گسسته است. در این قسمت به تشریح یک شکل– بسته تخمین خوب از $n!$ به نام تقریب استرلینگ می‌پردازیم. متأسفانه، همه کاری که از دستمان می‌آید تخمین زدن است: هیچ شکل بسته‌ای برای! n وجود ندارد – پس اثبات این موضوع ما را به آن سوی طرح نهایی ۶.۰۴۲ می‌برد.

۱. ٦ حاصل‌ضرب‌ها به مجموع‌ها

یک روشی خوب برای بدست آوردن یک حاصل‌ضرب اغلب تبدیل آن به مجموع با گرفتن لگاریتم است. در مورد فاکتوریل، این گونه می‌شود

$$\begin{aligned} ln(n!) &= ln(1.2.3\ldots(n-1).n) \\ &= ln1 + ln2 + ln3 + \ldots ln(n-1) + lnn \\ &= \sum_{i=1}^{n} lni \end{aligned}$$

تا کنون یک مجموعیابی ندیده‌ایم که حاوی یک لگاریتم قبل از آن باشد! خوشبختانه، ابزاری که در ارزیابی مجموع‌ها به کار بردیم همچنان کارآمد است: روش انتگرال.

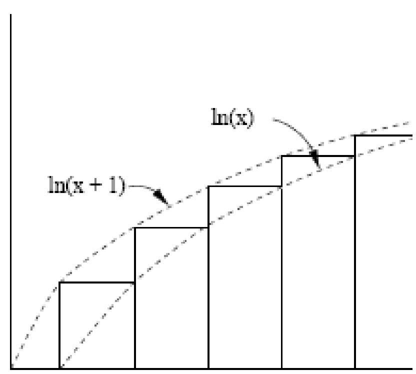
می‌توانیم عبارت‌های این مجموع را با $ln\,x$ و $ln(x+1)$ همان طور که در تصویر ٦ نشان داده شده محدود کنیم. این کران‌هایی بر $ln(n!)$ به شکل پائین به دست می‌دهد:

$$\int_1^n ln\,x \quad dx \le \sum_{i=1}^n \quad ln\,i \le \int_0^n ln(x+1)\,dx$$

$$nln\left(\frac{n}{e}\right)+1 \le \sum_{i=1}^{n} ln\,i \le (n+1)\,ln\left(\frac{n+1}{e}\right)+1$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e \le n! \le \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} e$$

خط دوم در ادامه خط اول با تکمیل انتگرال‌گیری است. خط سوم با به توان رساندن بدست می‌آید.



تصویر ٦: این نمودار روش انتگرال را برای محدود سازی مجموع $\sum_{i=1}^{n} lni$ به تصویر می‌کشد.

بنابراین $n!$ کاری شبیه به فرمول شکل بسته $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ انجام می‌دهد. یک تجزیه بسیار دقیق‌تر یک فرمول شکل بسته غیر منتظره به دست می‌دهد که مجانباً دقیق است:

لم (فرمول استرلینگ)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2n\pi}$$

فرمول استرلینگ توضیح می‌دهد که چطور $n!$ در حد رفتار می‌کند، ولی برای استفاده موثر از آن، نیاز داریم بدانیم چه میزان به کرانه مقادیر مختلف نزدیک است. آن معلومات با فرمول‌های محدود سازی بدست می‌آید:

حقیقت (تقریب استرلینگ).

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} e^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} e^{\frac{1}{12n}}$$

تقریب بر فرمول مجانبی دلالت دارد، از آن‌جایی که $e^{\frac{1}{12n+1}}$ و $e^{\frac{1}{12n}}$ هر دو همانطور که n بالا می‌رود به ۱ نزدیک می‌شوند، این عدم تساویها را می‌توان با استقراء معین نمود، ولی جزئیات آن ناخوشایند است.

کران‌های فرمول استرلینگ بسیار محکم‌اند. برای مثال، اگر $n=100$، آنگاه کران‌های استرلینگ از این قرارند:

$$100! \geq \sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100} e^{\frac{1}{1201}}$$

$$100 \leq \sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100} e^{\frac{1}{1200}}$$

تنهـا تفـاوت میـان کـران‌هـای بـالایی و پـائینی در عبـارت پایـانی اسـت. بطـور خـاص $e^{\frac{۱}{۱۲۰۱}} \approx ۱/۰۰۰۸۳۲۹۹$، $e^{\frac{۱}{۱۲۰۰}} \approx ۱.۰۰۰۸۳۳۶۸$ به عنوان یک نتیجه‌گیری، کران بالایی بیشتر از $۱+۱۰^{-۶}$ مرتبه از کران پائینی نیست.

به طور شگفت آوری محکم است! فرمول استرلینگ را به خاطر بسپارید؛ اغلب از آن بهره خواهیم گرفت.

۲. ٦ کرانه‌هایی با مجموعیابی مضاعف

راهی دیگر برای نتیجه‌گیری از تقریب استرلینگ به خاطر سپردن این است که $ln\,n$ تقریباً همـان H_n است. این کار به ما اجازه می‌دهد از نتیجه‌ای کـه قـبلاً بـرای $\sum H_k$ از طریـق مجموعیـابی مضـاعف بدسـت آوردیـم اسـتفاده کنـیم. تقریـب مـا بـرای H_k بـه مـا گفـت کـه $ln(k+۱) \le H_k \le ۱+lnk$. نوشتن مجدد، درمی‌یابیم که $H_k - ۱ \le lnk \le H_k - ۱$. آن ادامه می‌یابـد که (با به جا گذاردن اینکه $i=۱$ عبارت در مجموع، که با ۰ هم بخشی دارد)،

$$\sum_{i=۲}^{n} ln\,i \le \sum_{i=۲}^{n} H_{i-۱}$$

$$= \sum_{i=۱}^{n-۱} H_i$$

$$= nH_{n-۱} - (n-۱) \qquad \text{بوسیله } (۸)$$

$$\le n\left(۱+ln(n-۱)\right) - (n-۱) \qquad \text{بوسیله } (۷)$$

$$nln(n-۱)+۱$$

به صورت برجسته همان کران هایسیت که از طریق روش انتگرال آنرا ثابت کردیم. می‌توانیم یک کران پائین‌تر مشابه مشتق کنیم.

۷. علامت گذاری مجانبی

علامت‌گذاری مجانبی یک نوع مختصر نویسی است که برای اندازه‌گیری سریع از رفتار یک تابع $f(n)$ وقتی که n بزرگتر می‌شود به کار می‌رود.

۷. ۱ ه کوچک

علامت‌گذاری مجانبی □ یک رابطه هم ارزی است که خاطر نشان می‌کند عبارتهای هم ارز □ دقیقاً در یک میزان رشد می‌کنند. یک ترتیب جزئی اکید وجود دارد که متناظر است با توابعی که بیانگر این موضوع هستند که یک تابع به طور معنا داری در میزانی آهسته‌تر زیاد می‌شود. مثلاً،

تعریف ۷.۱ برای تابع‌های $f, g: \square \to \square$، می‌گوئیم f بطور مجانبی کوچکتر از g، در نمادها $f(x) = o(g(x))$، است

اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = 0.$$

برای مثال، $1000x^{1.9} = o(x^2)$، چون که $1000x^{1.9}/x^2 = 1000/x^{0.1}$، و از آنرو که $x^{0.1}$ به نامتناهی تمایل دارد با x و ۱۰۰۰ ثابت است، ما داریم $\lim_{x \to \infty} 1000x^{1.9}/x^2 = 0$. این استدلال مستقیماً نتیجه‌گیری را تعمیم می‌دهد.

لم ۷.۲ $x^a = o(x^b)$ برای تمام ثوابت غیر منفی $a < b$.

با استفاده از این حقیقت که $\log x < x$ برای همه $x > 1$، می‌توانیم ثابت کنیم.

لم ۳. ۷ $\log x = o\left(x^{\varepsilon}\right)$ برای همه $x > 1, \varepsilon > 0$.

برهان. انتخاب کنید $\varepsilon > \delta > 0$ و در نامساوی $\log x < x$.بجای x، z^{δ} را قرار دهید این ایجاب

می‌کندکه

توسط لم ۲. ۷ (۹) $$\log z < z^{\delta} / \delta = o\left(z^{\varepsilon}\right) \qquad \square$$

قضیه فرعی ٤. ۷ $x^{b} = o\left(a^{x}\right)$ برای هر $a, b \in R$ با $a > 1$.

برهان. از (۹)، $$\log z < \frac{z^{\delta}}{\delta}$$

برای همه $\delta > 0$ و $z > 1$. بنابراین

$$\left(e^{b}\right)^{\log z} < \left(e^{b}\right)^{z^{\delta} / \delta}$$

$$z^{b} < \left(e^{\log\ a(b/\log\ a)}\right)^{z^{\delta} / \delta}$$

$$= a^{(b/\delta \log^{a}) z^{\delta}}$$

$$< a^{z}$$

برای تمام z ها بطوری که $(b/\delta \log a) z^{\delta} < z$. ولی از آنجا که $z^{\delta} = o(z)$، این آخرین

نامساوی برای همه حتی z هم صادق است.

لم ۳. ۷ و قضیه فرعی ٤. ۷ را می‌توان به روشهای مختلف دیگری هم ثابت کرد، به عنوان مثال با

استفاده از قانون ال هوپیتال یا سری‌های مکلورن برای $\log x$ و e^{x}. برهان‌ها را می‌توان در

متن‌های محاسبه انتگرال پیدا نمود.

مسئله ۱. ادعای اولیه‌ای که $\log x < x$ برای همه $x > ۱$ (نیاز به محاسبه‌هـای انتگرالـی مقـدماتی دارد) را ثابت کنید.

مسئله ۲. ثابت کنید که رابطه R، بر تابع بطـوری کـه $f = \circ(g)$ اگـر و فقـط اگـر $f\,Rg$ یـک ترتیب جزئی اکید است همین، R متعدی و پاد متقارن است: اگر fRg آنگاه $\neg gRf$.

مسئله ۳. ثابت کنید که $f \sim g$ اگر و فقط اگر $f = g + h$ برای یک تابع $h = \circ(g)$.

۲. ۷ شگفتی بزرگ (اوه بزرگ)

شگفتی بزرگ پر کاربردترین علامت‌گذاری مجانبی است. به کار می‌رود تا یک کران بالا بـر روی رشد تابع، همچون زمان انجام یک الگوریتم، را بدست بدهد.

تعریف ۵. ۷ برای تابع‌های فرضی $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، با g غیر منفی، می‌گوئیم که

$$f = \mathrm{O}(g)$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$$

این تعریف مشخص می‌کند که

لم ۶. ۷ اگر $f = \circ(g)$ یا $f \sim g$، آنگاه $f = \mathrm{O}(g)$

برهان $\frac{f}{g} = ۰$ یا $\lim \frac{f}{g} = ۱$، دلالت می‌کند بر $\lim \frac{f}{g} < \infty$.

فهمیدن اینکه معکوس لم ۲. ۷ صحیح نیست آسان است. برای مثال $۲x = \mathrm{O}(x)$ ولی x - $۲x$ و $.۲x \neq \circ(x)$

فرمول‌بندی معمولی شگفتی بزرگ مفهوم $\limsup$ را بر زبان جاری می‌کند بدون آنکه آنـرا معنـا کند، مثلاً، در اینجا یک تعریف معادل داریم:

تعریف۷. ۷ برای تابع‌های فرضی f ، $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ می‌گوئیم که

$$f = \mathrm{O}(g)$$

اگر و فقط اگر یک ثابت $c \geq \circ$ وجود داشته باشد و یک $x_\circ$ بـه طـوری کـه بـرای همـه $x \geq x_\circ$، $.|f(x)| \leq cg(x)$

این تعریف باز هم که پیچیده است، ولی ایده آن ساده اسـت: $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ بـه ایـن معنـی است که $f(x)$ کوچکتر یا برابر با $g(x)$ است و یک فاکتور ثابـت را ندیـده بگیـریم c، viz، و استثناهای برای $x < x_\circ$, viz, x کوچک را ندیده بگیریم.

لم ۸. ۷ فرض کنید g غیر منفی است. اگر $f = \circ(g)$، آنگاه درست نیست که $g = \mathrm{O}(f)$ [۱]

برهان.

---

۱. $\lim_{x\to\infty} \sup h(x) ::= \lim_{x\to\infty} \mathrm{lub}_{y \geq x}\, h(y)$

در تعریف $\mathrm{o}(\ )$ به $\limsup$ نیاز داریم چونکه اگر $f(x)/g(x)$ میان مثلاً ۳ و ۵ به نوسان در آید، همانطور که x اضافه می‌شود، آنگاه $f = \mathrm{o}(x)$ چونکه $f \leq ۵g$، ولی $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ وجود خارجی ندارد. با این وجود، در این مورد $\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$ را خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۱}{۰}=\infty$$

بنابراین $g \neq O(f)$. □

گزاره ۷ .۹ $۱۰۰x^۲ = O(x^۲)$

برهان. انتخاب کنید $c=۱۰۰$ و $x_۰=۱$ آن‌گاه گزاره صادق است از آن‌جایی که بـرای تمـام $x \geq ۱$ داریم $\left|۱۰۰x^۲\right| \leq ۱۰۰x^۲$. □

گزاره ۷ .۱۰ $x^۲+۱۰۰x+۱۰=O(x^۲)$.

برهان. $\left(x^۲+۱۰۰x+۱۰\right)/x^۲=۱+\frac{۱۰۰}{x}+\frac{۱۰}{x^۲}$ و بنابر این در وقتـی x بـه سـمت بـی‌نهایـت میـل مـی‌کنـد، برابـر اسـت بـا $۱=۱+۰+۰$. بنـابراین در حقیقـت $x^۲+۱۰۰x+۱۰ \sim x^۲$، و در نتیجـه $x^۲+۱۰۰x+۱۰=O(x^۲)$، دقیقاً، عکس آن هم درست است که $x^۲=O(x^۲+۱۰۰x+۱۰)$ □

گزاره ۷ .۱۰. به چند جمله‌ای‌های دلخواه هم تعمیم پیـدا مـی‌کنـد، بـا برهـانی مشـابه کـه از آن می‌گذریم.

گزاره ۷ .۱۱. برای $a_k \neq ۰$، $a_kx^k+a_{k-۱}x^{k-۱}+\ldots+a_۱x+a_۰=O(x^k)$.

علامت‌گذاری شگفتی بزرگ بویژه هنگامی مفید است که زمـان انجـام یـک الگـوریتم را توضـیح می‌دهد. برای مثال، الگوریتم معمولی برای ضرب کردن ماتریس $n\times n$ نیاز به محاسبه n عملیات در بدترین حالت دارد. این واقعیت را می‌توان دقیقاً با گفتن اینکه زمـان انجـام الگـوریتم $O(n^۳)$ است. بنابراین چنین علامت‌گذاری مجانبی ممکن می‌سازد که درباره سرعت الگوریتم بحث شـود

بدون مراجعه به فاکتورهای ثابت یا جملات با ترتیب پائین‌تر که ویژگی دستگاهی دارنـد در ایـن مورد یک راه و روش ماتریسی مبتکرانه‌ای در ضرب وجود دارد که به $O\left(n^{۲/۵۵}\right)$ عمل نیاز دارد. این روش بنابراین بسیار بیشتر درباره ماتریس‌های به اندازه کافی بزرگ موثر خواهد بود. متأسفانه، طرز عمل ضرب– ($O(n^{۲/۵۵})$) تقریباً مورد استفاده قرار نمی‌گیرد زیرا گاهی اوقات کارآمدی کمتر نسبت به طرز عمل معمولی $O\left(n^{۳}\right)$ برماتریس‌های با اندازه معمولی دارد.

حتی[1] می‌شود تصور کرد که یک الگوریتم $O\left(n^{۲}\right)$ برای ضرب ماتریس وجود داشته باشـد، ولـی هیچ کدام شناخته نشده‌اند.

۳. ۷ تتا

تعریف ۲. ۱. ۷

$$f=\theta\left(g\right) \text{ اگر و فقط اگر } f=O\left(g\right)\wedge g=O\left(f\right)$$

عبارت $f=\theta\left(g\right)$ با درکی شهودی می‌تواند به صورت " g,f درون یک فاکتور ثابت برابرنـد" بیان شود.

ارزش این علامت‌گذاری‌ها این است که آنها نسبتهای رشد را برجسته می‌سـازند و پخـش شـدن فاکتورهای مبهم (درهم برهم) و عبارت‌های با ترتیب– پائین را ممکن می‌سازد. برای مثـال، اگـر زمان اجرای یک الگوریتم چنین باشد

$$T\left(n\right)=۱۰n^{۳}-۲۰n^{۲}+۱$$

آنگاه

$$T(n)=\theta\left(n^{3}\right)$$

در این حالت، خواهیم گفت که T متعلق به ترتیب n^{3} است یا اینکه $T(n)$ به طور مکعبی رشد می‌کند.

مثال دیگر این چنینی عبارت است از

$$\pi^{2}3^{x-7}+\frac{\left(2.7x^{113}+x^{9}-86\right)^{4}}{\sqrt{x}}-1.08^{3x}=\theta\left(3^{x}\right)$$

صرف دانستن اینکه زمان اجرای یک الگوریتم $\theta\left(n^{3}\right)$ است، برای مثال، مفید است، زیرا اگر n مضاعف شود می‌توانیم پیش بینی کنیم که زمان به کار رفته روی هم رفته[2] بوسیله یک فاکتور حداکثر ۸ برای کل n افزایش خواهد یافت.در این حالت علامت‌گذاری تتا داده‌هایی درباره قابل درجه‌بندی بودن یک الگوریتم یا سیستم را نگه می‌دارد. قابلیت درجه‌بندی داشتن ،البته، موضوع بزرگی در طراحی الگوریتم‌ها و سیستم‌ها است.

[2] از آنجا که $\theta\left(n^{3}\right)$ فقط مستلزم زمان الگوریتم است، $T(n)$، بین cn^{3} و dn^{3} برای ثابتهای $0<c<d$ و $T(2n)$ حداکثر می‌آواند بطور منظم $T(n)$ را به اندازه فاکتوری به بزرگی $\frac{nd}{c}$ افزایش دهد. این فاکتور مطمئناً نزدیک n است وقتی n ب اندازه کافی بزرگ باشد و $T(n)\sim n^{3}$.

۷ .٤ دام‌هایی با اوه بزرگ

فهرستی طولانی از راه‌هایی که با علامت‌گذاری اوه بزرگ به اشتباه منجر می‌شود وجود دارد. این بخش به ارائه تعدادی از راه‌هایی که علامت گذاری اوه بـزرگ بـه خرابـی و نـا امیـدی مـی‌بـرد، می‌پردازد.

۷ .٤ .۱ ناکامی نمایی

گاهی اوقات روابط درگیر با اوه بزرگ خیلی آشکار نیستند. برای مثال، شاید یک نفر حدس بزنـد که $۴^x = O\left(۲^x\right)$ از آنجا که ۴ تنها یک فاکتور ثابت بزرگتر از ۲ است.

این استدلال نادرست است، با این وجود؛ ۴^x عملاً خیلی سریع‌تر از ۲^x رشد می‌کند.

گزاره ۷ .۱۳ $\qquad ۴^x \neq O\left(۲^x\right)$

برهان. $۲^x/۴^x = ۲^x/\left(۲^x۲^x\right) = ۱^x/۲^x$ به این ترتیب،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲^x}{۴^x} = ۰$$

بنابراین در واقع $۲^x = o\left(۴^x\right)$ قبلاً متوجه شدیم که این دلالت دارد بر $۴^x \neq O\left(۲^x\right)$.

۷ .٤ .۲ در هم و بر همی ثابت

هر ثابتی عبارت است از $O(۱)$ برای مثال، $۱۷ = O(۱)$. این حقیقـت دارد زیـرا اگـر فـرض کنـیم $f(x) = ۱۷$ و $g(x) = ۱$، آنگاه یک $c > o$ وجود دارد و یک $x_۰$ به طوری که $\left|f(x)\right| \le cg(x)$. به‌طور خاص، می‌توانستیم $c = ۱۷$ را در نظر بگیریم و $x_۰ = ۱$، از آن‌جایی که $|۱۷| \le ۱۷$ برای همه $x \ge ۱$. برقرار است می‌توانیم قضیه‌ای غلط بسازیم که این حقیقت را بهتر بیان کند.

قضیه غلط ۷.۱۴

$$\sum_{i=1}^{n} i = O(n)$$

برهان غلط. تعریف کنید $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n$

و از آنجا که نشان داده‌ایم که هر ثابت $O(1)$ است

$f(n) = O(1)+O(1)+\ldots+O(1) = O(n)$.

البته در واقع $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 \neq O(n)$

اشتباه از درهم و برهمی حاکم برگزاره $i = O(1)$ ناشی می‌شود. بـرای هـر ثـابتی $i \in \mathbb{N}$ صـحیح است که $i = O(1)$ به طور مشخص‌تر، اگر f یک تابع ثابت فرضی باشد، آنگاه $f = O(1)$ ولـی در این قضیه غلط، i یک ثابت نیست بر روی مجموعه‌ای از مقادیر $0,1,\ldots n$ کـه بسـتگی بـه n دارد، حرکت می‌کند و به هر حال، ما عبارت‌های $O(1)$ را به این معنی که عـدد هسـتند را جمـع نمی‌بندیم. ما هرگز حتی تعریف نکرده‌ایم که $O(g)$ خود به خود معنی‌دار است، آن فقط باید در مورد " $f = O(g)$ " بکاربرده شود تا رابطه میان توابع f و g را توضیح دهد.

۷ .٤ .۳ اشتباه کران پائینی

گاهی وقت‌ها مردم به نادرستی از اوه بزرگ (شگفتی بزرگ) در متن به عنوان کران پائینی استفاده می‌کنند. برای مثال، ممکن است بگویند، "زمان انجام $T(n)$،حداقل $O(n^2)$ است"،وقتی که احتمالاً منظورشان چیزی مثل " $O(T(n)) = n^2$" است، یا بطور صحیح‌تر، "$n^2 = O(T(n))$".

۴. ۴. ۷ اشتباه تساوی

علامت‌گذاری $f = \mathrm{O}(g)$ به استواری خود را در سنگر قرار داده است، ولی استفاده از "=" واقعاً که تأسف آور است. برای مثال، اگر $f = \mathrm{O}(g)$، کاملاً عقلانی است که بنویسیم $\mathrm{O}(g) = f$. ولی انجام چنین کاری ممکن است. وسوسه کند اشتباه زیررا مرتکب شویم: چون که $۲n = \mathrm{O}(n)$، می‌توانیم بگوئیم $\mathrm{O}(n) = ۲n$. ولی $n = \mathrm{O}(n)$، بنابراین نتیجه می‌گیریم که $n = \mathrm{O}(n) = ۲n$ و بنابراین $n = ۲n$. برای اجتناب از این نامفهومی، هرگز نخواهیم نوشت "$\mathrm{O}(f) = g$".