فصل اول

استدلال‌ها

۱- استدلال چیست؟

استدلال همانا روش اثبات حقیقت است. ولی آنچه یک استدلال را تشکیل می‌دهد در زمینه‌های مختلف فرق دارد.

- حقیقت قانونی، توسط یک هیئت منصفه براساس مدارک مجاز ارائه شده در دادگاه به اثبات می‌رسد.
- حقیقت معتبر توسط یک شخص یا سازمان مورد اعتماد به اثبات می‌رسد.
- حقیقت علمی فرض می‌شود، و فرضیه علمی بوسیله چندین آزمایش تأیید یا رد می‌شود.
- حقیقت احتمالی در نتیجه تجزیه آماری یک نمونه از داده‌ها بدست می‌آید. برای مثال افکار عمومی توسط آرای یک مجموعه تصادفی کوچک از مردم استخراج می‌شود.
- استدلال فلسفی عبارت است از شرح دقیق و قانع کننده براساس استحکام رأی و معقول بودن. بهترین مثال همان "می‌اندیشم پس هستم" می‌باشد که یک عبارت لاتینی است. این عبارت متعلق به فیلسوف – ریاضی‌دان فرانسوی رنه دکارت است که در آغاز قرن ۱۷ در

رساله خود آورده است، و یکی از معروف‌ترین نقل قولهای جهان می‌باشد: دربارهٔ این عبارت در اینترنت پژوهشی کنید تا غرق در لینک‌های به دست آمده شوید.

استنباط وجود داشتن خود بر این اساس که دارید درباره هستی خود می‌اندیشید خیلی جالب توجه است و تعمیق قانع کننده از اولین اصول است. به هر حال، با چندین خط استدلال در این باره، دکارت بر آن است تا نتیجه بگیرد که خدای رحمان و پایان ناپذیری وجود دارد. این که ریاضی نیست.

ریاضیات همچنین مفهوم خاصی برای "استدلال" دارد.

تعریف: برای استدلال رسمی یک گزاره عبارت است از زنجیره‌ای از استنباط‌های منطقی که به مجموعه‌ای از اصول منتهی می‌شود.

سه ایده کلیدی در این تعریف برجسته می‌شوند: ۱- گزاره ۲ - نتایج منطقی ۳- اصل موضوع. در بخشهای بعدی، درباره این سه نظریه با تعدادی از روشهای پایه‌ای سازمان دهنده استدلالات بحث خواهیم کرد.

۲- گزاره منطقی

تعریف: گزاره منطقی عبارتی است که می‌تواند درست یا غلط باشد.

این تعریف به نظر خیلی کلی می‌رسد، ولی عبارتهایی نظیر "به چه دلیل تو رومئو هستی؟" و "یک الف به من بده" را استثناء می‌کند.

ولی همه گزاره‌ها ریاضی نیستند.

مثلاً " نام همسر آلبرت، ایرن است " چه بسا که واقعی باشد و می‌توان بوسیله مدارک قانونی و گواهی تولد فرزندانشان آنرا به اثبات رساند، ولی این یک عبارت ریاضی نیست.

از دیدگاه ریاضی گزاره‌های منطقی معنادار باید درباره موضوعات کاملاً تعریف شده ریاضی مثل اعداد ، مجموعه‌ها، توابع، روابط و غیره باشند و باید برای تشریح آنها از واژه شناسی معنادار خاص ریاضی شبیه "و" و "برای هر" استفاده کرد. بهتراست این موضوع را با مثالی چند از ارقام و نقشه های دو وجهی توضیح دهیم که همگی از نظر ریاضی معنادار هستند.

گزاره منطقی۲. ۱ ۲+۳=۵

این گزاره صحیح است.

گزاره ۲. ۲ فرض کنیم $P(n) ::= n^{۲} + n + ۴۱$ و $P(n)$ یک عدد اول باشد، $\forall n \in \mathbb{N}$

نماد $\forall$ " به ازای همه " خوانده می‌شود. نماد $\mathbb{N}$ نمادی برای مجموعه اعداد طبیعی در نظر گرفته می‌شود، که از قرار ۳،۲،۱،۰،... می‌باشند (برای لیست کامل از T.A خود تقاضا کنید) فاصله بعد از $\mathbb{N}$ فقط جدا ساز میان عبارات است. عدد اول یک عدد طبیعی بزرکتر از ۱ می‌باشد به طوریکه جز ۱ و خودش بر هیچ عدد طبیعی دیگری قابل قسمت نباشد، مثلاً ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و . . . . .

بیائید تعدادی آزمایش عددی را مثال بزنیم تا این گزاره را بررسی کنیم:

$p(0) = ۴۱$ که یک عدد اول می‌باشد.

$p(۱) = ۴۳$ که یک عدد اول می‌باشد.

$p(۲) = ۴۷$ که یک عدد اول می‌باشد.

$p(۳) = ۵۳$ که یک عدد اول می‌باشد ... $p(۲۰) = ۴۶۱$ که یک عدد اول به حساب می‌آید. انگار دارد به شکل ادعایی معقول در می‌آید. در واقع می‌توانیم تا $n = ۳۹$ ادامه دهیم و تأکید کنیم بر اینکه $p(۳۹) = ۱۶۰۱$ یک عدد اول است.

امّا اگر $n = ۴۰$ فرض شود آنگاه $P(n) = ۴۰^۲ + ۴۰ + ۴۱ = (۴۱)^۲$ که $(۴۱)^۲$ عدد اول نیست. از آنجا که عبارت به ازاء همه اعداد n اول نیست، پس این گزاره، گزارهٔ غلطی است. در واقع نشان دادن اینکه هیچ چند جمله‌ای ثابت نمی‌تواند همه اعداد طبیعی را به اعداد اول تبدیل کند، سخت نیست. نکته اینجاست که شما در کل نمی‌توانید، یک ادعا را دربارهٔ یک مجموعه نامتناهی به وسیلهٔ یک مجموعه متناهی از عناصر آن چک کنید. مهم نیست این مجموعه متناهی چقدر بزرگ باشد.

در اینجا به دو مثال بسیار رایج اشاره می‌کنیم.

گزاره ۳-۲ عبارت $a^۴ + b^۴ + c^۴ = d^۴$ وقتی که a,b,c,d اعداد صحیح مثبت باشند هیچ جوابی ندارد. در نمادگزاری منطقی، با فرض بر اینکه $\mathbb{Z}^+$ اعداد صحیح مثبت را مشخص می‌سازد، داریم.

$\forall a \in \mathbb{Z}^+ \forall b \in \mathbb{Z}^+ \forall c \in \mathbb{Z}^+ \forall d \in \mathbb{Z}^+ .\ a^4 + b^4 + c^4 \neq d^4.$ رشته‌های $\forall$، شبیه این معمولاً برای مطالعه آسانتر به صورت اختصاری در می‌آیند:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ .\ a^4 + b^4 + c^4 \neq d^4.$$

اویلر در سال ١٧٦٩ این موضوع را حدس زده است. ولی این گزاره منطقی ۲۱۸ سال بعد توسط نوآم الکلس در مدرسه هنرهای آزاد مس آو مردود اعلام شد. او جواب اینگونه پیدا کرد. $a = ۹۵۸۰۰, \quad b = ۲۱۷۵۱۹, \quad c = ۴۱۴۵۶۰, \quad d = ۴۲۲۴۸$

گزاره ٤. ۲ $\quad ۳۱۳(x^{۳} + y^{۳}) = z^{۳}$

در صورتی که $x, y, z \in \mathbb{N}.$ هیچ جوابی ندارد.

این گزاره منطقی هم غلط است، ولی کوچکترین مثل نقض بیش از هزار رقم دارد!

گزاره ٥. ۲

هر نقشه‌ای را می‌توان با چهار رنگ، رنگ کرد بطوری که مناطق هم جوار[1] رنگهای متفاوت داشته باشند.

این گزاره صحیح است و به عنوان " قضیه چهار رنگ" شناخته می‌شود. با این همه، استدلالهای نادرست بسیاری برجای مانده بودند، به طور مثال اثباتی که به مدت ۱۰ سال تا اواخر قرن نوزدهم پیش از آنکه اشتباه بودنش به اثبات برسد، پابرجا بود. سرانجام یک استدلال بی‌نهایت پر زحمت در سال ١٩٧٦ توسط ریاضی‌دانانی به نام‌های آپل و هاکن یافت شد که از برنامه‌های پیچیده کامپیوتری استفاده کردند برنامه‌ای تا نقشه‌های چهار رنگ پذیر را دسته‌بندی کنند، با اجرای این برنامه چندین هزار نقشه در گروه‌بندی‌ها قرار نگرفتند و این موارد توسط هاکن و دستیارانش من جمله دختره پانزده ساله خودش با دست بررسی شدند. بحثهای زیادی در گرفت مبنی بر اینکه آیا

---

۱. دو منطقه هم‌جوار هستند هرگاه دارای مرز مشترک از طول مثبت باشند. دو منطقه در حالی که فقط مرز مشترکشان چند نقطه باشند را هم‌جوار در نظر نمی‌گیرند.

این یک استدلال منطقی بود. استدلال به قدری بزرگ بود که بدون کامپیوتر بررسی کردن آن ناممکن و هیچ کس نمی‌توانست تضمین بدهد که کامپیوتر به درستی محاسبه کرده است، هیچ کس هم نیروی آن را ندارد تا چهار رنگ‌پذیری هزاران نقشه که با دست بررسی شده بودند را دوباره بررسی کند. سرانجام حدود پنج سال پیش یک استدلال قابل فهم انسانی درباره نظریه چهار رنگ ارائه شد نگاه کنید به سایت (www.math.gatech.edu/thomas/Fc/fourcolor.html)[۲]

گزاره ٦. ۲ (گولدباخ)

هر عدد صحیح زوج بزرگتر از ۲ حاصل جمع دو عدد اول است.

هیچ کس نمی‌داند که آیا این گزاره صحیح است یا غلط. این حدس متعلق به گلدباخ است که به سال ۱۷٤۲ باز می‌گردد. برای یک دانشمند کامپیوتر برخی از مهم‌ترین پرسشها درباره برنامه و سیستم "صحت یا درستی "نظام برنامه است که آیا برنامه و سیستم وظیفه محوله را به خوبی انجام می‌دهند. برنامه‌ها " به طور مفتضحانه‌ای یک اسبه " حرکت می‌کنند و جمعیت رو به افزایش از پژوهشگران و کاربران در تلاشند تا راههایی برای اثبات صحت برنامه پیدا کنند. آنها در این تلاشها درباره تراشه‌های cpu به اندازه کافی موفق بوده‌اند که هم اینک به صورت عادی توسط کارخانه‌های تولید کننده تراشه مورد استفاده قرار می‌گیرد تا صحت تراشه را ثابت کنند و از اشتباه رسواگرانه کارخانه اینتل در دهه ۱۹۹۰ در پخش و بررسی اجتناب کنند. پیشرفت

۲. داستان چهار رنگ در یک کتاب مروری خوب (نه تخصصی) بازگو شده است. «چهار رنگ کافی است. چطور مسئله نقشه حل شد» راین ویلسون، دانشگاه پرشبتون، ۲۰۰۳، صفحه ۲۷٦، ISBN ٦۹۱-۰-۸-۱۱۵۳۳.

روش‌های ریاضی برای اثبات برنامه‌ها و سیستم‌ها، باقیماندهٔ یک عرصهٔ تحقیقاتی فعال است. ما این روش‌ها را در آینده در دروسی مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۳- روش اصول گرایی

روش استاندارد اثبات حقیقی در ریاضیات توسط اقلیدس، ریاضی‌دان اهل اسکندریه مصر حدود ۳۰۰ سال قبل از تولد مسیح ابداع شد. نظریه او عبارت بود از شروع مسئله با پنج فرضیه هندسی که به دلیل قرار گرفتن بر تجربه مستقیم غیر قابل انکار به نظر می‌رسید. (به عنوان مثال میان دو نقطه یک پاره خط مستقیم وجود دارد).

گزاره‌هایی نظیر این را که به سادگی مورد قبول قرار می‌گیرند اصول می‌نامند. با شروع توسط این اصل موضوع، اقلیدس به استقرار بسیاری از گزاره‌های منطقی دیگر بوسیله ارائه "استدلال‌ها " مبادرت ورزید. یک استدلال عبارت است از دنباله‌ای از نتایج منطقی از اصول موضوع گزاره که قبلاً اثبات شده‌اند. بطوریکه گزاره مورد سؤال را نتیجه می‌دهند.

احتمالاً شما در کلاسهای هندسی دبیرستان استدلال‌های زیادی نوشته‌اید و مقدار قابل توجهی از آن را در اینجا خواهید دید.

اصطلاحات مشترک بسیاری برای یک قیاس منطقی که به اثبات رسیده وجود دارند. اصطلاحات مختلف به نقش قیاس منطقی در روند یک بدنه بزرگتر کاری اشاره می‌کنند.

- گزاره‌های مهم را قضیه می‌نامند.

- یک لم عبارت است از یک گزاره‌ی مفید اولیه برای اثبات گزاره‌های بعدی.
- نتیجه (قضیه فرعی) یک چاره‌اندیشی است، نوعی گزاره که در چند قدمی یک قضیه قرار دارد.

این تعریفها دقیق نیستند. در واقع گاهی اوقات یک لم خوب، که در ابتدا برای اثبات قضیه‌ای بکار می‌رود از قضیه‌ای که برای اثبات آن بکار می‌رود مهم‌تر است.

– روش اصول– و– اثبات اقلیدسی که هم اکنون روش اصول گرایی نامیده می‌شود، همانا زیربنای ریاضیات امروزی است. در واقع فقط مشتی بدیهیات وجود دارند که ZFC نامیده می‌شوند که به نظر می‌آید که همراه با تعدادی قواعد استنتاج منطقی، برای انشقاق اصول اولیه تمام ریاضیات کافی باشند.

۱. ۳ اصول ما

اصول ZFC در مطالعه و توضیع زیربنای ریاضیات مهم هستند ولی برای کمانهای علمی بسیار ابتدائی هستند. محاسبه اثبات اینکه ۴=۲+۲ به بیس از ۲۰/۰۰۰ مرحله نیاز است بنابر این در عوض شروع با ZFC، قصد داریم مقدار بسیار بزرگی از بدیهیات را به عنوان زیربنا در نظر بگیریم. ما همه واقعیات آشنا در ریاضی دبیرستان را قبول خواهیم کرد.

این باعث حرکت سریع ما خواهد شد ولی شما پی خواهید برد که این نوعِ نامشخص اصول، بسیار مسئله ساز خواهد شد مثلاً در میانه یک استدلال ممکن است به تعجب درآئید " آیا باید این واقعیت کوچک را ثابت کنم یا اینکه می‌توانم آنرا به عنوان یک اصل درنظر بگیریم برای

پرسیدن راحت باشید ولی واقعاً پاسخ مطلقی وجود ندارد. فقط برای آنچه در نظر دارید پیش قدم شوید وسعی نکنید که از تکالیف و مسائل امتحانی با گفتن اینکه هر چیزی اصل است، شانه خالی کنید.

۲. ۳ برهان‌ها در عمل

در اصل، برهان می‌تواند هر بخش از استنباطهای منطقی از اصول باشد که قبلاً به اثبات رسیده‌اند و اینکه با گزاره پرسشی سازگار باشد. این آزادی در ساختن در ابتدا می‌تواند سخت به نظر برسد، شما اغلب برهان را چگونه شروع می‌کنید؟

اخبار خوبی یه گوش می‌رسد: بسیاری از برهانها از تعدادی الگوهای استاندارد پیروی می‌کنند البته برهان‌ها در جزئیات متفاوت‌اند، ولی این الگوها حداقل قالبی را برایتان فراهم می‌کنند تا آنها را پرکنید. ما از خلال این الگوهای استاندارد حرکت خواهیم کرد و در این راه به نظریه‌های پایه‌ای و لغزشهای مشترک اشاره کرده ومثالهایی ارائه خواهیم کرد. بسیاری از این الگوها با هم تناسب دارند، ممکن است یکی از آنها یک طرح سطح بالا به شما بدهد در حالی که برخی دیگر ممکن است در سطحی دیگر از جزئیات به شما کمک کنند و همچنین تکنیکهای استدلالی گمراه کننده را از این پس به شما نشان خواهیم داد.

دستور العملهای زیر بسیار ویژه هستند و به شما می‌گویند دقیقاً چه واژه‌هایی را برروی برگه خود بنویسید. مطمئناً شما آزادید چیزها را براساس شیوه خود بیان کنید ما فقط چیزی را به شما می‌دهیم که می‌توانستید برزبان آورید تا اینکه حتماً با مشکلی اساسی برخورد نکنید.

اصول ZFC

جهت یادآوری: ما اصول نظریه مجموعه‌های زرملو را فهرست می‌کنیم. اصولاً همه ریاضی می‌تواند از این اصول به همراه تعدادی قوانین استنتاج نتیجه شود.

بسط: دو مجموعه در صورتی با هم برابرند که اعضای یکسان داشته باشند. در نمادگزاری منطق ریاضی به این نحوه بیان می‌شود.

$(\forall z.(z\in x \leftrightarrow z\in y)) \rightarrow x = y.$

- **جفت سازی** برای هر دومجموعه x و y، یک مجموعه $\{x,y\}$ وجود دارد، که فقط شامل x و y به عنوان عناصر آن مجموعه است.
- **اجتماع:** اجتماع یک دسته، z، از مجموعه‌ها هم یک مجموعه است.

$\exists u \forall x .(\exists y\ x \in y \wedge y \in z) \leftrightarrow x \in u$

- **بی نهایت:** یک مجموعه نامتناهی وجود دارد; بویژه یک مجموعه غیر تهی x بطوریکه برای هر مجموعه $y\in x$ مجموعه $\{y\}$ هم یک عضو x می‌باشد.
- **زیر مجموعه:** برای هر مجموعه داده شده x و هر گزاره $p(y)$ مجموعه‌ای وجود دارد که به طور مشخص آن عناصری از $y\in x$ را در بردارد که در $p(y)$ صادق است.
- **مجموعه توانی:** کلیه زیر مجموعه‌های یک مجموعه، مجموعهٔ دیگری را تشکیل می‌دهند.
- **جایگزینی:** تصویر یک مجموعه تحت یک تابع، یک مجموعه است.

● **زیر بنا:** برای هر مجموعه غیر تهی x مجموعه‌ای وجود دارد $y \in x$ بطوری که x و y مجزا هستند. (به طور خاص این اصل، یک مجموعه را از اینکه یکی از اعضای خود باشد باز می‌دارد.)

● **اصل انتخاب:** ما می‌توانیم یک عنصر از هر مجموعه از یک گروه از مجموعه‌های غیر تهی را انتخاب کنیم باز هم مشخص‌تر، اگر f یک تابع روی یک مجموعه باشد و نتیجه به کارگیری f به هر عنصری در آن مجموعه همیشه یک مجموعه غیر تهی باشد آنگاه یک تابع انتخاب g وجود دارد که برای هر y در مجموعه $g(y) \in y$. ما قصد نداریم در این درس با اصول ZFC مشغول به کار شویم فقط فکر کردیم شاید دوست داشته باشید آنها را ببینید.

٤- اثبات یک استلزام

تعداد بی شماری از قضایای ریاضی بدین گونه‌اند "اگر P آنگاه Q " یا به طور هم‌ارز " p دلالت می‌کند بر Q" اینجا مثالهای بیشتر داریم:

- (فرمول معادله درجه دوم)

$$x = \frac{(-b \pm \sqrt{b^۲ - 4ac})}{۲a}$$ آنگاه $a \neq ۰$ و $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر

- (حدس گولدباخ) اگر n عدد صحیح زوج بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه n حاصل جمع دو عدد اول است.

- اگر $۰ \leq x \leq ۲$ آنگاه $-x^۳ + ۴x + ۱ > ۰$

برای اثبات یک مفهوم روشهای استاندارد بسیاری وجود دارد.

۱. ٤ روش ۱#

به منظور اثبات اینکه P دلالت می‌کند بر Q:

۱- بنویسید، "فرض کنیم P" صحیح است.

۲- نشان می‌دهیم Q به طور منطقی حاصل می‌شود.

مثال

قضیه ۱. ٤ اگر $۰ \leq x \leq ۲$ آنگاه $-x^۳ + ۴x + ۱ > ۰$

پیش از آنکه استدلالی دربارهٔ این قضیه بنویسیم، برای چرایی حقیقت داشتن آن باید مقداری تمرین انجام دهیم.

به طور حتم نامساوی برای $x = ۰$ برقرار است. زیرا سمت چپ برابر ۱ است و $۱ > ۰$. هر چقدر که x افزایش می‌یابد، عبارت $۴x$ (که مثبت است) اساساً به نظر می‌رسد که مقدار بزگتری از $-x^۳$ (که منفی است) باشد. به عنوان مثال، وقتی $x = ۱$ داریم $۴x = ۴$ولی $-x^۳ = -۱$. در واقع، انگار که $-x^۳$ تسلط خود را بر $۴x$ شروع نمی‌کند تا جایکه $x > ۲$ شود. بنابر این به نظر می‌رسد $-x^۳ + ۴x$ باید برای تمام xها بین ۰ و ۲ غیر منفی باشد که در نتیجه $-x^۳ + ۴x + ۱$ عددی مثبت است.

تا به حال همه چیز روبراه است. ولی باید همچنان تمام آن عبارتهای " به نظر می‌رسد " را با عبارتهای، منطقی جایگزین کنیم. می‌توانیم با فاکتور گرفتن از $-x^3+4x$ به نتایج بهتری دست پیدا کنیم، که کار سختی هم نیست:

$$-x^3+4x^2=x(2-x)(2+x)$$

آهان! برای x میان 0 و 2 تمام جمله‌هایی که سمت راست قرار دارند غیر منفی محسوب می‌شوند. حاصل ضرب جمله‌های غیر منفی هم غیر منفی است. بیائید این مکافات را به یک استدلال روشن تبدیل کنیم

برهان. فرض کنید $0 \le x \le 2$ پس $2+x,\ x,\ 2-x,$ همگی

غیر منفی هستند. بنابر این اساس، حاصل ضرب این جمله‌ها هم غیر منفی است.

با افزودن ۱ به این حاصل ضرب یک عدد مثبت به دست می‌آید بنابر این:

$$x(2-x)(2+x)+1>0$$

با ضرب کردن عبارات سمت چپ داریم.

$$-x^3+4x+1>0$$

همانگونه که ادعا شد. □

چند نکته وجود دارد که در کلیه استدلال‌ها به کار می‌روند:

- شما مادامی که برای به تصویر در آوردن مراحل منطق یک استدلال در تلاش هستید باید اغلب مقداری تمرین کنید. اگر شما بخواهید تمرین‌تان می‌تواند عنوان نامنظم بگیرد- پر از

نتایج بی‌حاصل، شکلهای هندسی عجیب و غریب، کلمات زشت، هر چه که باشد. ولی تمرینتان را از استدلال نهایی خود که باید واضح و مختصر باشد جدا کنید.

استدلال‌ها نوعاً با واژهٔ " برهان " آغاز می‌شوند و با شکل‌واژه‌هایی نظیر□ یا $q.e.d$ به پایان می‌رسند. تنها مفهوم این قراردادها روشن کردن نقطهٔ آغاز و پایان استدلال است.

۲. ٤ روش -۲# اثبات عکس نقیض یک استلزام (p مستلزم Qاست) به طور منطقی برابر است با عکس نقیض خود "نقیض Q مستلزم‌است نقیض p " اثبات یکی به همان خوبی اثبات دیگری است و اغلب اثبات عکس نقیض آسان‌تر از اثبات عبارت اصلی است. اگر چنین باشد، پس می‌توانید به روش زیر عمل کنید:

۱. بنویسید "ما عکس نقیض را اثبات می‌کنیم": و سپس عکس نقیض را بیان کنید.

۲. همانند روش ۱# پیش بروید.

مثال

قضیه ۲. ٤ اگر r گنگ باشد آنگاه $\sqrt{r}$ هم گنگ است.

باز هم به خاطر داشته باشید که اعداد گویا مساوی با یک نسبتی از اعداد صحیح است ولی اعداد گنگ برابر نیستند. بنابر این ما باید نشان بدهیم که اگر r نسبتی از اعداد صحیح نیست، آنگاه $\sqrt{r}$ هم نسبتی از اعداد صحیح نیست. این که خیلی پیچیده شد! می‌توانیم هر دو علامت "نفی" را حذف کرده و به جای آن با در نظر گرفتن عکس نقیض استدلال را مستقیماً پیش ببریم.

برهان: عکس نقیض را ثابت می‌کنیم: اگر $\sqrt{r}$ گویا باشد، آنگاه r هم گویا است .

فرض کنید که $\sqrt{r}$ گویا است. در این صورت اعداد صحیحی نظیر a و b وجود دارند به طوری که $\sqrt{r}=\frac{a}{b}$.

مجذور هر سمت بدست می‌دهد: $r=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}$

از آنجائیکه $a^{۲}$ و $b^{۲}$ اعداد صحیح هستند، r هم گویا است. □

۵- برهان "اگر و تنها اگر"

بسیاری از قضایای ریاضی ادعا می‌کنند که دو طرف عبارت منطقاً برابرند، یعنی اینکه یکی برقراراست اگر و تنها اگر دیگری برقرار باشد.

مثالهای بیشتر در این باره:

- یک عدد صحیح مضربی از ۳ است اگر و تنها اگر مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد
- دو مثلث دارای دو یال مساوی اگر و تنها اگر کلیه زوایا یکسان باشند.
- عدد صحیح مثبت $p\geq ۲$ یک عدد اول است اگر و تنها اگر $۱+(p-۱).(p-۲)...۳.۲.۱$ مضربی از p باشد.

۱. ۵ روش ۱#: ثابت کنید هر گزاره دیگری را نتیجه می‌دهد.

گزاره "p اگر و تنها اگر Q" برابر است با دو گزاره "p نتیجه می‌دهد Q" و "Q نتیجه می‌دهد p"بنابر این می‌توانید"اگر و تنها اگر" را با اثبات دو استلزام فوق ثابت کنید:

۱. بنویسید، "ماثابت می‌کنیم p دلالت بر Q دارد و بالعکس".

۲. بنویسید، "ابتدا، نشان می‌دهیم که p دلالت دارد بر Q". این کار را با یکی از روشهای بخش ٤ انجام دهید.

۳. بنویسید، "حالا نشان می‌دهیم که Q بر p دلالت می‌کند"، دوباره، این کار را با یکی از روشهای بخش ٤ انجام دهید.

مثال

چنانچه دو مجموعه دارای عناصر یکسان باشند برابر تعریف می‌شوند، یعنی اینکه $X = Y$ معنی می‌دهد $z \in x$ اگر و تنها اگر $z \in y$ (عملاً این اولین اصل ZFC است.) بنابر این قضیه تساوی مجموعه‌ها را می‌توان به صورت قضیه اگر و تنها اگر بیان و اثبات نمود.

قضیه ۱. ٥ (قانون دُمورگان برای مجموعه)فرض کنید C, B, A مجموعه هستند، آنگاه:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

برهان. نشان می‌دهیم اگر $z \in A \cap (B \cup C)$ آنگاه $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ و بالعکس.

ابتدا، نشان می‌هیم $z \in A \cap (B \cup C)$ ایجاب می‌کند که $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

فرض کنید $z \in A \cap (B \cup C)$ پس z در A قرار دارد و همچنین Z در B یا C قرار دارد. با این حساب، z در مجموعه $A \cap B$ یا $A \cap C$ قرار دارد که ایجاب می‌کند.

$z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

اکنون نشان می‌دهیم که $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ایجاب می‌کند $z \in A \cap (B \cup C)$

فرض کنید $z\in (A\cap B)\cup(A\cap C)$. در این صورت z هم در A و B یا هم در A و C قرار دارد. بنابر این □ در A و همچنین z در B یا C قرار دارد. این نتیجه می‌دهد که $□ \in A\cap(B\cup C)$. □

۲. ۵ روش ۲#: ساختن زنجیری از اگر و تنها اگرها

به منظور اثبات p صحیح است اگر و تنها اگر Qصحیح باشد.

۱. بنویسید، " زنجیره‌ای از استلزام‌های اگر و تنها اگر می‌سازیم".

۲. ثابت کنید p با گزاره دومی مساوی است که این گزاره برابر است. با گزارهٔ سومی و الی آخر، تا به Q برسید. این روش در حالت کلی بسیار مشکل‌تر از اولی است، اما نتیجهٔ اثبات می‌تواند کوتاه، دقیق و زیبا باشد.

مثال. انحراف معیار یک (دنباله از مقادیر $x_1,x_2,\ldots,x_n$ به شکل زیر تعریف شده است.

$$\sqrt{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots+(x_n-\mu)^2}$$

که در آن μ میانگین مقادیر است. $$\mu=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

قضیه ۲. ۵ انحراف معیار یک دنباله از مقادیر $x_1,x_2,\ldots$ صفر است اگر و تنها اگر تمامی اعداد با هم برابر باشند.

به عنوان مثال، انحراف معیار نتایج امتحان برابر با صفر است اگر و تنها اگر هر کسی متوسط نمرهٔ کلاسی را بدست آورد.

برهان. یک زنجیراز استلزام‌ها " اگر و تنها اگر " را می‌سازیم. انحـراف معیـار $x_1, x_2, \ldots, x_n$ صـفر است اگر و تنها اگر.

$$\sqrt{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots+(x_n-\mu)^2}=0$$

کـه در آن μ میـانگین $x_1,\ldots,x_n$ مـی‌باشـد. ایـن معادلـه برقـرار اسـت کـه اگـر و تنهـا اگـر $(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots+(x_n-\mu)^2=0$. از آنجائیکه صفر تنها عددی است کـه مجـذور آن صفر است هر عبارت در این معادله غیر منفی است، پس این معادله برقرار است که اگر و تنها اگر فقط هر جمله دقیقاً برابر با صفر باشد. این صحت دارد اگر و تنها اگر هر مقدار x برابر باشـد بـا مقدار μ.

مسئله ۱. مجدداً استدلال مربوط به قانون دُمورگان بـرای مجموعـه را بـه وسـیله یـک زنجیـر از استلزام‌های اگر و تنها اگر بنویسید.

٦. چگونه استدلالهای موجه بنویسید

مقصود از یک استدلال این است که برای خواننده با وضوح قطعی مفهوم یک واقعیتـی را فـراهم کنید. برای اینکه به طور مؤثر به این مقصود نائل شوید سعی بیشتر از آنکـه صـحت منطقـی یـک استدلال در نظر باشد مورد نیاز است: استدلال موجه باید روشن هـم باشـد. ایـن اهـداف معمـولاً مکمل هستند یک استدلال تمام عیار بیشتر شبیه یک استدلال صحیح است تـا جائیکـه سـخت‌تـر بتوان اشتباهات را پنهان کرد.

در عمل منظور از استدلال یک هدف متحرک است. استدلالها در یک مجلهٔ پژوهش حرفه‌ای به طور کلی برای همه غیر قابل فهم هستند جز فقط برای چندین کارشناس که همهٔ لم‌ها و قضیه‌های در نظر گرفته شده را می‌شناسند که اغلب در استدلال بدون اثبات هستند. استدلالها در اولین هفته‌های آغازین یک دوره مثل ۶.۰۴۲ که توسط یک ریاضی‌دان حرفه‌ای بیان می‌شوند بسیار ملال آور و طولانی به نظر می‌رسند در واقع، آنچه را ما در حرف به عنوان استدلال موجه قبول می‌کنیم با آنچه در چند هفته اول آغاز دوره ۶.۰۴۲ به عنوان استدلالهای موجه در نظر می‌گیریم متفاوت است ولی حتی چنین هم که باشد می‌توانیم تعدادی سرمشق کلی برای نوشتن استلالهای موجه ارائه کنیم:

طرح بازی خود را اظهار کنید. یک استدلال خوب با تشریح خطوط کلی برهان آغاز می‌شود این کار باعث می‌شود خواننده به تصویر محکمی برسد تا بتواند جزئیات بعدی را هضم کند.

یک جریان خطی را حفظ کنید. گاهی اوقات استدلالهایی را می‌بینیم که شبیه موزائیک‌های ریاضی هستند که همراه با لقمه‌های چرب و نرم بر روی صفحه استدلال پاشیده می‌شوند. این کار خوب نیست مراحل استدلال شما باید یکی پس از دیگری در یک نظم متوالی قرار بگیرد.

استدلال یک محاسبه نیست بلکه یک رساله است. بسیاری از دانش‌جویان از اساس به همان شیوه‌ای که انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنند استدلالها را می‌نویسند. نتیجه عبارت از یک توالی بلند بالایی از اظهای نظرهای بدون توضیح. این بد است.

یک استدلال موجه معمولاً شبیه یک رساله با تعدادی معادله درون آن است. جمله‌های کامل به کار ببرید.

از نشان علائم از سمبولیسم افراطی اجتناب کنید. احتمالاً خوانندهٔ شما در فهم کلمات وارد است، ولی مهارت کمتری در خواند علائم رمزگونهٔ ریاضی دارد. بنابر این عقلایی است هر کجا می‌توانید از واژه‌ها استفاده کنید.

ساده کردن استدلالهای طولانی پیچیده، وقت بیشتری از خواننده می‌گیرد تا آن را بفهمد و می‌تواند به آسانی اشتباهات را بپوشاند. بنابر این یک استدلال با مراحل منطقی کمتر، استدلال بهتری است.

نمادها رابا ملاحظه معرفی کنید. گاهی وقتها یک قضیه را می‌توان تا حد زیادی با معرفی یک نماد ویژه یا اصطلاحی جدید ساده کرد. ولی از آنجائیکه که از خواننده می‌خواهید که تمام مواد تازه را به خاطر بسپارد با مضایقه این کار را انجام دهید و به یاد داشته باشید که تا عملاً معانی متغیرهای جدید، اصطلاحات و نمادها را روشن نکرده‌اید آنها را به کار نبرید.

ساختار استدلالهای طولانی معمولاً برنامه‌های طولانی به مجموعه‌ای از روندهای کوچکتر تقسیم می‌شوند. استدلالهای طولانی بیشتر اینطور هستند. حقایقی که مورد نیار در استدلال شما است حقایقی که به طور ساده بیان شده‌اند ولی اثبات شده‌اند را بهتر است به صورت لم‌های مقدماتی اثبات کنید. آسانی وضع می‌شوند ولی همچنین اگر شما دارید بصورت مکرر همان حقیقت را

تکرار می‌کنید، سعی کنید آن قضیه را در یک لم کلی بدست آورید تا بتوانید کـراراً بـه آن رجـوع کنید.

زور نگوئید. در تلاش برای تشر زدن به خواننده برای قبول آن چیـزی کـه در اثبـات آن مشـکل دارید از عبارتهایی نظیر " به روشنی " یا " آشکارا " استفاده نکنید. همچنین هرگـاه یکـی از ایـن جملات را در استدلال بعضی‌های ببینید به حالتی آماده باش درآئید.

خاتمه. در جایی از برهان تمام واقعیات مورد نیاز خود را بیان کنید. از این وسوسـه کـه خواننـده خودش نتیجه آشکار را بیرون بکشد بپرهیزید. آنچه برای شما به عنوان نویسنده آشکار اسـت بـه همان شکل برای خواننده آشکار نیست در عوض خودت همه چیز را به هم گره بـزن و توضـیح بده که چرا قضیه برقرار است.

همسانی میان استدلال‌های خوب و برنامه‌های موجه به ماورای ساختار گسـترش مـی یابـد. تمـام اندیشه محکم مورد نیاز برای استدلالها در طراحی نظام رایانه هم کاربرد دارد. وقتی که الگوریتم‌ها و پروتوکول‌ها "تقریباً کار" تکیه برقضایای بی پروپا کرده‌اند نتایج ممکن است فاجعه آمیز شـوند. یک مثال دم دستی همان تراک ۲۵ بود دستگاهی که برای پرتو درمانی قربانیان سرطان تهیـه شـده بود، ولی در موقعیتهایی باعث مرگ افراد شد زیرا نرم افزار باعث حجم زیادی از پرتوافکنی شـد. میزان زیاد که لایق به تازگی در اوت ۲۰۰۴ یک خطا روی سیسـتم رایانـه‌ای کـه توسـط خطـوط هوایی آمریکان و ایالات مورد استفاده قراری گرفت باعث شد تمام ناوگان هر دو شرکت– و تمام مسافرانشان را به زمین زد!

به طور حتم روزی فراخواهد رسید که همگی ما مورد لطف نظامهای کامپیوتری که توسط شما و همکلاسی‌هایتان طراحی شده‌اند قرار می‌گیریم. بنابر این جداً امیدواریم که شما توانایی ارائه فرضیه‌های منطقی کوه پیکر را در خود زیاد کنید تا یک سیستم عملاً همان کاری را انجام بدهد که فکر می‌کنید انجام می‌دهد!

۷- قاعدهٔ گزاره‌ها

براستی که جای تعجب است که مردم موفق شدند به زبان انگلیسی با هم ارتباط برقرار کنند در اینجا چندین جملهٔ نمونه را می‌آوریم:

۱- "امکان دارد که کیک بخورید یا بستنی بخورید"

۲- "اگر خوکها بتوانند پرواز کنند آنگاه شما هم می‌توانید باند چرنوف را بفهمید".

۳- اگر بتوانید هر مسئله‌ای را که از خود در می‌آوریم حل کنید، آنگاه نمره A در این دوره بدست می‌آورید".

۴- "هر آمریکایی رؤیایی دارد"

این جملات مشخصاً چه معنایی می‌دهند؟ آیا می‌توانید هم بستنی و هم کیک را بخورید یا فقط یک دسر انتخاب می‌کنید؟ اگر جملهٔ نخست صحیح باشد آنگاه باند چرنوف غیر قابل درک است؟ اگر بتوانید تعدادی از مسئله‌ها که ما طرح می‌کنیم را حل کنید نه همه را آنگاه، آیا در این دوره نمرهٔ A بدست می‌آورید و همچنان آیا می توانید نمرهٔ A را بدست آورید اگر نتوانید هیچ

مسئله‌ای را حل کنید؟ آیا جملهٔ آخر دلالت می‌کند بر اینکه همه آمریکائی‌ها یک رویای یکسانی دارند یا همگی رویاهای مختلفی دارند؟ برخی از عدم اطمینان‌ها در مکالمات معمولی قابل تحمل‌اند ولی وقتی که می‌خواهیم مشخصاً عقایدی را تنظیم بندی کنیم – مثلاً در ریاضیات – ابهام‌های ذاتی زبان روزمره به یک مشکل واقعی تبدیل می‌شود. نمی‌توانیم امیدوار به ارائه یک شناسه دقیق باشیم اگر مطمئن نباشیم که لغات خاص چه معنی دارند (و، به شما هشدار نمی‌دهیم ولی امکان دارد که در هفته‌های پیش‌رو شناسه‌ها بسیار دقیق وحشتناکی درباره ریاضیات مطرح کنم) بنابر این قبل از ورود به ریاضیات، نیاز داریم مسئله چگونگی صحبت درباره ریاضیات را بررسی کنیم.

برای فائق آمدن بر ابهام زبان انگلیسی، ریاضی‌دانان یک زبان ویژه کوچک ابداع کرده‌اند تا درباره روابط منطقی حرف بزنند. این زبان آکثراً از واژه‌های عادی زبان انگلیسی و عبارتهایی نظیر "یا" ، "دلالت می‌کند بر" و "به ازاء همه" استفاده می‌کند. ولی ریاضی دان‌ها به این واژه‌ها تعریف دقیق‌تری بیش از آنچه در یک فرهنگ لغت معمولی وجود دارد اعطاء می‌کنند. بدون دانستن این تعاریف، ممکن است با خواندن این زبان دمساز شوید، ولی همهٔ نکات باریک را از دست داده و گاهی وقتها برای ادامهٔ کار مشکل خواهید داشت.

به طور شگفت آوری، در نیمه راه یادگیری این زبان منطقی، به مهم‌ترین مسئلهٔ باز علوم رایانه برمی‌خوریم – که حل آن می‌تواند جهان را تغییر دهد.

۱-۷ گزاره‌های ترکیبی

در زبان انگلیسی می‌توانیم گزاره‌ها را با کلماتی همچون "نه" ، "و" ، "یا" ، "دلالت می‌کند بـر"، و "آنگاه" تغییر داده، ترکیب و با هم مربوط سازیم. به عنوان مثال ما می‌توانیم، سه گزاره را به یک گزاره تبدیل کنیم مثل این:

اگر همه انسانها فناپذیر باشند و همهٔ یونانی‌ها انسان باشند، آنگاه همهٔیونانی‌ها فناپذیرند.

از این زمان به بعد، دیگر خیلی به داخل گزاره‌ها نشان نخـواهیم داد– خـواه ریاضـی دانـان را در بربگیرند یا فناپذیری یونانی، – امّا بیشتر به چکونگی ترکیب و رابطهٔ گزاره‌ها خـواهیم پرداخـت. بنابر این مکرراً از متغیرهایی نظیر " Q" و " P" به جای گزاره‌های مشخص مثل "همـهٔ انسـانها فناپذیرند" و "۵ = ۳ + ۲" استفاده خواهیم کرد. فهم این مسئله این اسـت کـه ایـن متغیرهـا، مثـل گزاره‌ها، فقط می‌تواند ارزشهایی مثل T (درست) و F (غلط) را بگیرنـد. بعضـی وقتهـا چنـین متغیرهای درست/ غلط را متغیرهای بولین به قیاس مخترعشان، جورج– که خودتان حدس زدید– بول، نامیده می‌شوند.

۱-۱-۷ "نقیض" ، "و" و "یا"

ما دقیقاً می‌توانیم این واژه‌های بخصوص را با استفاده از جدول ارزش تعیین کنیم. به عنوان مثـال چنانچه " P" بیانگر گزاره‌ای دل بخواهی باشد، آنگاه درستی گزاره "نقـیض P" بوسـیلهٔ جـدول ارزش زیر تعیین می‌شود:

P	نقیض P
T	F
F	T

اولین ردیف جدول خاطرنشان می کند که هنگامی که گزارهٔ P درست باشد، گزارهٔ "نقیض P" غلط است خط دوم نشان می‌کند که هنگامی که P غلط است نقیض P درست است. احتمالاً همان چیزی است که شما انتظارش را داشتید.

درکل، یک جدول ارزش درست/غلط بودن ارزش یک گزاره را برای هر وضع احتمالی ومتغیرها نشان می‌دهد. برای مثال، جدول ارزش برای گزارهٔ " P و Q" چهار ردیف دارد، از آنجا که دو متغیر می‌توانند در چهار شکل مختلف قرار بگیرند:

P	Q	P و Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

براساس این جدول ، گزاره " P و Q" وقتی صحیح است که گزاره‌های P و Q هر دو صحیح باشند. این عبارت احتمالاً روش اندیشهٔ شما را دربارهٔ واژه "و " منعکس می‌کند.

در جدول ارزش‌یاب برای گزارهٔ " P یا Q" یک نکته‌ی باریک وجود دارد:

P	Q	P یا Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

این جدول می‌گوید که " P یا Q" درست است وقتی که P درست باشد، Q درست باشد، یا هر دو صحیح باشند. در گفتار روزمره همیشه این مفهوم مورد نظر از "یا" نیست، ولی این تعریف استاندارد در نگارش ریاضی است. بنابر این اگر یک ریاضی‌دان بگوید، "ممکن است کیک بخورید یا ممکن است بستنی بخورید" آنگاه شما می‌توانید هر دو را بخورید.

۲-۱-۷ "دلالت می‌کند بر"

کوچکترین واژهٔ متصل کنندهٔ غیر استدلالی " دلالت می‌کند بر" است. ریاضی‌دانان گزاره‌های " Pدلالت می‌کند بر Q" و اگر P آنگاه Q" را مترادف در نظر می‌گیرند، بنابر این دارای جدول ارزش یکسان هستند. خطوط شماره گذاری شده‌اند تا بعداً بتوانیم به آنها رجوع کنیم.

P	Q	P دلالت می‌کند بر Q، اگر P آنگاه Q
1. T	T	T
2. T	F	F
3. F	T	T
4. F	F	T

بیائید با این تعریف آزمایش کنیم. برای مثال، آیا گزارهٔ زیر درست است یا غلط ؟ «اگر حدس گولدباخ درست باشد، آنگاه $x^{۲} \geq ۰$ برای هر عدد حقیقی x صادق است» حالا، قبلاً به شما گفتیم که کسی نمی‌داند که آیا حدس گولدباخ درست بوده یا غلط. ولی آن مسئله نباید ممانعت کند که از جواب دادن به پرسش طفره بروید! شکل این گزاره $P \rightarrow Q$ است در جائی که P به مثابه "حدس گولدباخ صحیح است" قرار دارد و Q "$x^{۲} \geq ۰$ به جای هر عدد حقیقی x" از وقتی که Q بطور یقین درست باشد، می‌توانیم بر روی سطرهای ۱ یا ۳ جدول ارزش دست بگذاریم. بهر طریق، گزاره به عنوان یک کل درست است!

یکی از مثالهای اصلی ما حتی یک جنبهٔ عجیب‌تر از استلزام‌ها را به نمایش می‌گذارد.

«اگر خوکها پرواز کنند،آنگاه شما هم می‌توانید باند چرنوف را بفهمید»

این را به عنوان یک توهین تلقی نکنید؛ ما فقط نیاز داریم درست یا غلط بودن این گزاره را به تصویر در آوریم. از روی کنجکاوی، پاسخ هر چه باشد هیچ ارتباطی ندارد به این که آیا شما باند چرنوف را می‌فهمید یا نه. خوکها پرواز نمی‌کنند، بنابر این ما در این حالت برروی ردیف ۳ یا ٤ جدول ارزش قرار داریم. در هر دو حالت، گزاره درست است.!

در مقابل، اینجا مثالی از یک استلزام غلط داریم:

«اگر مهتاب سفید باشد، آنگاه ماه از پنیر چدار سفید ساخته شده است».

بله، مهتاب سفید است. ولی، ماه از پنیر سفید چدار ساخته نشده است. بنابر این ماروی ردیف ۲ جدول ارزش قرار داریم، و گزاره غلط است.

جدول ارزش برای استلزام دربارهٔ قضایا را می‌توان به شکل واژه‌های زیر مختصر کرد:

– یک استلزام وقتی درست است که قسمت اگر غلط باشد یا قسمت آنگاه درست باشد. این عبارت ارزش به خاطر سپردن را دارد، بخش بزرگی از کلیه گزاره‌های ریاضی به شکل اگر – آنگاه هستند.

۳. ۱. ۷ "اگر و تنها اگر"

ریاضی‌دانان معمولاً گزاره‌ها را به روش دیگر هم بهم متصل می‌کنند که در گفتار معمولی رخ نمی‌دهد. گزاره " P اگر و تنها اگر Q" اظهار می‌کند که P و Q منطقاً برابرند، یعنی اینکه، یا هر دو صحیح یا هر دو غلط هستند.

P	Q	P اگر و تنها اگر Q
1. T	T	T
2. T	F	F
3. F	T	T
4. F	F	T

اگر و تنها اگر زیر برای هر عدد حقیقی x درست است:

"$|x| \geq ۲$ اگر و تنها اگر $x^۲ - ۴ \geq ۰$"

⋮

برای برخی از مقادیر x هر دو نامساوی درست هستند. برای دیگر ارزش‌های x ، هیچکدام از نامساوی‌ها درست نیستند. به هر حال با این وجود گزاره به عنوان یک کل درست است.

عبارت "اگر و تنها اگر" غالباً اتفاق می‌افتد که به شکل " *Iff* " مختصر می‌شود.

۲. ۷ منطق گزاره‌ای در برنامه‌های رایانه

گزاره‌ها و اتصالهای منطقی همیشه در برنامه‌های کامپیوتر رخ می‌دهد. برای مثال، تکهٔ زیر را در نظر بگیرید که هم می‌تواند $c, c++$ و یا جاوا باشد:

اگر ((۱۰۰< x <=۰ && y)□۰< x)

(دستورالعملهای بیشتر)

علامت || بیانگر "یا" و علامت && به معنای "و" می‌باشد.

دنباله دستورالعمل‌های جلوتر چنانچه گزاره‌بعدی واژه اگر صحیح باشد، اجرا می‌شود. در تفحصی از نزدیک، این عبارت بزرگ از دو گزارهٔ ساده تر ساخته شده است. فرض کنید A گزاره‌ای باشد که $x > 0$ ، و فرض کنید B گزاره‌ای باشد که $y >$ ۱۰۰. پس می‌توانیم حالت را بـه ایـن روش بازنویسی کنیم:

A یا A ((نقیض),B)

جدول ارزش ثابت می‌کند که این قضیهٔ پیچیده منطقاً مساوی است با " B یا A".

A	B	A یا ((غیر A), B)	A یا B
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

این به معنی آن است که می‌توانیم بدون تغییر روال برنامه رمز خرد و ریز را ساده کنیم:

اگر $(x > ۰ \square y > ۱۰۰)$

(دستورالعملهای بعدی)

بازنویسی یک عبارت منطقی که متغیرهای زیادی را در ساده‌ترین شکل آن درگیر سازد هم مشکل و هم با اهمیت است. (عبارات) ساده کننده به صورت نرم‌افزاری ممکن است بطور روشنی سرعت برنامه‌اش را افزایش دهد. ولی بسی معنادارتر، طراحان تراشه به طور اصولی با همان چالش روبرو می‌شوند. با این حال به جای کوچک کردن علائم && و || در یک برنامه، کار آنها کوچکتر کردن تعداد ابزارهای سخت افزاری یکسان برروی تراشه است. نتیجهٔ نهایی بالفعل عالی است: یک تراشه با مقدار کمتری ابزار کوچکتر، مصرف انرژی کمتر،میزان عیب پایینتر و برای ساخت انبوه ارزان‌تر است.

۳. ۷ یک نماد گذاری مرموز

زبانهای برنامه ساز از علائمی نظیر && به معنی و ! به جای کلماتی مثل "و" و "نقیض" استفاده می‌کنند. ریاضی‌دانان هم علائم مرموز خاص خودشان را ابداع کرده‌اند تا بیانگر این واژگان باشند، که در شکل ذیل خلاصه شده‌اند:

نمادگذاری مرموز	انگلیسی
$\neg P$ (همچنین، $\overline{P}$)	" P نقیض"
$P \wedge Q$	" P,Q "
$P \vee Q$	" P یا Q "
$P \rightarrow Q$	"اگر P آنگاه Q" یا " P دلالت دارد بر Q"
$P \leftrightarrow Q$	" P اگر و تنها اگر Q"

برای مثال، با استفاده از این نمادگذاری، "اگر P و نقیض Q، نتیجه می‌دهد R" به این ترتیب نوشته می‌شود. $(P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

این زبان رمزگونه برای نوشتن قضایای پیچیدهٔ منطقی بصورت فشرده مفید است. ولی در اکثر متون عادی کلماتی مثل "یا" و "دلالت می‌کند بر" به نسبت با علائمی نظیر $\vee$ و $\rightarrow$ آسان‌تر فهمیده می‌شوند بنابر این ما به دلیل کم حرف زدن از این زبان رمزگون استفاده می‌کنیم و به شما توصیه می‌کنیم شما هم همین کار را انجام دهید.

٤. ٧ استلزام‌های منطقی برابر

آیا این دو جمله یک مطلب را بیان می‌کنند؟

اگر گرسنه باشم، آنگاه بدخلق هستم.

اگر بدخلق نباشم آنگاه گرسنه نیستم.

می‌توانیم این مطلب را با طرح مجدد هر دو عبارت به شکل منطق گزاره‌ای فرض کنید P گزارهٔ "گرسنه هستم" باشد، و فرض کنید Q "بدخلق هستم" باشد عبارت اول می‌گوید که " P دلالت می‌کند بر Q، و عبارت دوم می گوید که (نقیض Q) دلالت می کند بر (نقیض P).

می‌توانیم این دو گزاره را در جدول ارزش مقایسه کنیم:

P	Q	Pدلالت می‌کند بر Q	(نقیض Q)دلالت می‌کند بر (نقیض P)
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

یقیناً هر دو گزاره دقیقاً برابرند. در کل "(نقیض Q) دلالت می‌کند بر (نقیض P)" عکس نقیض it / P دلالت می‌کند بر Q نامیده می‌شود. و همانطور که به تازگی نشان دادیم، هر دو دارند همان چیز را به روشها مختلف می‌گویند. این برابری برای برنامه‌ریزی شناسه‌های ریاضی و حتی گفتار روزمره مفید است، زیرا همیشه می‌توانید هر یک از این دو را که آسان‌تر باشد برای گفتن یا نوشتن برگزید.

در مقابل، معکوس " P نتیجه می‌دهد Q " همان گزاره " Q نتیجه می‌دهد P" است. در اصطلاح مثال ما، معکوس از این قرار است.

اگر بدخلق باشم، آنگاه گرسنه هستم.

به نظر می‌رسد که این استدلال فرق داشته باشد و جدول ارزش این شک را تأئید می‌کند:

P	Q	Pدلالت می‌کند بر Q	Q دلالت می‌کند بر P
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

بنابراین، از روی منطق یک استلزام برابر است با ضد عکس نقیض خود، اما برابر با معکوس خود نیست.

یک ارتباط نهایی: یک استلزام و معکوس آن با هم، برابر یک گزاره اگر و تنها اگر است، بطور خاص این دو گزاره با یکدیگر، برای مثال

اگر بدخلق باشم، آنگاه گرسنه هستم.

اگر گرسنه باشم، آنگاه بدخلق هستم.

مساوی هستند با یک عبارت:

بدخلق هستم اگر و تنها اگر گرسنه باشم.

یکبار دیگر، می‌توانیم با جدول ارزش این را تحقیق کنیم:

P	Q	(Qدلالت می‌کند بر P) و (Pدلالت می‌کند بر Q)	Pاگر و تنها اگر Q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

۸- استنتاج منطقی

نتایج منطقی یا قواعد استنتاجی برای اثبات گزاره‌های جدید که اخیراً ثابت شده‌اند به کار می‌رود. یک قاعدهٔ استنباطی زیربنایی "قیاس استثنایی " است. این قاعده می‌گوید که یک استدلال P همراه با یک استدلال $P \rightarrow Q$ تعدی می‌دهد Q قواعد استنتاجی گاهی اوقات به مفهومی با مزه نوشته می شوند، برای مثال، قیاس استثنایی نوشته می‌شود:

قاعده
$$\frac{P,\ \ P \rightarrow Q}{Q}$$

وقتی که گزاره‌های بالای خط، به اصطلاح مقدم، ثابت شوند، آنگاه می توانیم گزاره‌های زیر خط را در نظر بگیریم، که نتیجه یا تالی نامیده می‌شوند، آنها هم ثابت می‌شوند.

نیازمندی اصلی یک قاعدهٔ استنتاجی این است که باید دقیق باشد: هر تعیینی از مقادیر درست که تمام مقدم‌ها را درست کند باید نتیجه را هم درست کند. بنابر این ما با اصول درستی کارمان را آغاز می‌کنیم و قواعد استنتاجی دقیق را به کار می‌بریم، هر چه را که ثابت کنیم هم درست خواهد بود. قواعد استنتاجی دقیق و طبیعی بسیاری وجود دارند، برای مثال:

قانون
$$\frac{P \rightarrow Q\ \ ,\ \ Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$$

قانون $\dfrac{\neg P \rightarrow Q \;\; , \;\; \neg Q}{P}$

قانون $\dfrac{\neg P \rightarrow \;\; \neg Q}{Q \rightarrow P}$

SAT

در صورتی یک گزاره ارضاء شونده است که مقداری برای متغیرها آن گزاره را درست کنند. برای مثال، $P \wedge \neg Q$ قابل قبول است برای اینکه عبارت درست است وقتی که P درست باشـد و Q نادرست باشد. از سوی دیگر، $P \wedge \neg P$ قابل قبول نیست زیرا که عبارت در کل برای هر دو مقدار P نادرست است. ولی تعیین اینکه یک گزاره پیچیده‌تر ارضاء کننده است یا خیر خیلی هم آسان نیست.

این یکی چطور است؟

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg R \vee \neg Q)$$

مسئله اصلی تصمیم‌گیری براینکه آیا یک گزاره قابل قبول است یا نه SAT نامیده می‌شـود. یـک روش برای حل SAT این است که یک جدول ارزش را ساخته و بررسی کرد که آیا اصلاً یک T آشکار می‌شود یا نه. ولی این تعریف خیلی هم کارا نیست؛

گزاره ای با n متغیر جدول ارزش با 2^n ردیف دارد. گزاره‌ای که فقط ۳۰ متغیر داشته باشـد، بـه بیش از یک میلیارد می‌رسد!

آیا راه حلی کافی برای SAT وجود دارد؟ آیا تعدادی روشـهای هوشـمندانه وجـود دارد کـه بـه سرعت تصمیم بگیرد که هر گزاره‌ای قابل قبول است یا نه؟ کسی نمی‌داند. و تعداد وحشـتناکی از

جواب دادن درمانده‌اند. یک راه حل مکفی برای SAT راه حلهای کافی دیگری را برای بسیار، بسیاری مسائل دیگر من جمله جمع‌بندی، جدول بندی، ریشه‌یابی و بررسی مداری را فراهم می کند. به نظر عالی می‌رسد، ولی آشفتگی در جهان پدید می‌آید. باز کردن پیامهای رمزدار در آن صورت وظیفه‌ای آسان خواهد بود (دربارهٔ اکثر رمزها). داد و ستدهای اینترنتی نامطمئن بوده و مکاتبات پنهانی توسط همهٔ افراد خوانده می‌شوند.

به هر جهت، در حال حاضر پژوهشگران کاملاً تردید دارند. هیچ کس هنوز یک نظریهٔ خوب برای اینکه چطور SAT را بسیار مؤثر حل کند یا اینکه ثابت کند که هیچ راه حل مؤثری برای آن نیست ارائه نداده است. این همان پرسش برجستهٔ بی‌پاسخ علوم رایانه‌ای است.

از طرفی دیگر،

$$\frac{\neg P \to \neg Q}{P \to Q} \quad \text{قانون}$$

دقیق نیست: اگر P بیانگر T باشد و Q بیانگر F، پس نتیجه می‌گیریم که مقدم صحیح بوده و ولی تالی غلط است.

مسئله۲. ثابت کنید که قاعدهٔاستنتاجی گزاره‌ای دقیق است iff حروف ربط (و) از کلیهٔ مقدم‌ها (فرض‌ها) خود نتایج خود را نتیجه می‌دهد.

همانگونه که دربارهٔ اصول بود، دربارهٔ قواعد استنتاجی خیلی رسمی نخواهیم بود. هر مرحلهٔ یک استدلال باید واضح و "منطقی" باشد، به خصوص، باید بیان کنید چه حقایقی که پیش از آن به اثبات رسیده منجر به نتیجه‌گیری جدید شده است.