فصل چهارم

رابطه‌های دوتایی (دوسویه)

۱. آیا ما با هم نسبتی داریم؟

پرسش‌هایی دربارهٔ اینکه چطور دو موضوع به هم مرتبط هستند محدوده‌ای است برای مطرح کردن هر آن کاری که به آن مشغول هستید. برای دو نفر، ممکن است بپرسید که آیا آنها با هم نسبتی دارند (مثل خویشاوندی) یا همدیگر را می‌شناسند، اینکه یکی از دیگری مسن‌تر است، اینکه آنها از یک جنس‌اند، نژاد، سن و . . . راجع به دو کشور، شما ممکن است بپرسید آیا با هم روابط تجاری دارند، آیا آن نفر اول درآمد سرانهٔ بالاتری دارد، آیا برای بازدید یکی از دیگری ویزا لازم است، . . . .

در ریاضیات یا علوم کامپیوتر، اگر دو متغیر مقادیری را تعیین کنند، بنابر عادت باید بپرسیم که آیا مقادیر یک اندازه‌اند، آیا مقدار نخست بزرگتر از دومی است (با فرض بر اینکه هر دو مقدار اعداد حقیقی باشند)، آیا هر دو مقدار مقسوم‌علیه مشترک دارند (با فرض بر اینکه هر دو مقدار عدد صحیح باشند)، آیا مقدار اول عضوی از مقدار دوم است (با این فرض که مقدار دوم یک مجموعه است) و آیا مقدار اول دامنه‌ای از مقدار دوم است (با فرض اینکه مقدار اول یک مجموعه و مقدار دوم یک تابع باشد). همهٔ اینها مثال‌هایی از روابط دوسویی هستند.

مفهوم روابط دوتایی به همان اندازه از نظر ریاضی اساسی است، که مفهوم تابع یا مجموعه است. در این یادداشتها ما مقداری واژه‌شناسی برای روابط دوسویه مشخص می‌کنیم و سپس بر روی دو نوع ویژه و مهم روابط دوتایی متمرکز می‌شویم: روابط هم ارزی و جزءاً مرتب.

۱. ۱ روابط و توابع

تعریف رسمی چنین است:

تعریف ۱. ۱ یک رابطهٔ دوسویی، R، متشکل است از یک مجموعهٔ A، که دامنهٔ R نامیده می‌شود، یک مجموعهٔ، B، که (برد) هم دامنهٔ R نامیده می‌شود و زیر مجموعهٔ $A\times B$ که گراف R نامیده می‌شود.

برای مثال، می‌توانیم یک "رابطهٔ در حال آموزش" برای پاییز ۲۰۰۵ در MIT تعریف کنیم تا دامنهٔ برابر با اسامی کلیهٔ گروه آموزشی باشد (دانشکده، استاد، معاون و . . .) و هم دامنه‌ای برابر با تمام تعداد موضوعات فهرست جاری باشد. گراف آن شبیه خواهد بود به

{(آلبرت مریر– مریر ۱۸/۰۶۲)، (۶.۰۴۶ ,سایان میترا)، (۱۸.۰۶۲ ,دیویلا شاین)، (۶.۰۴۶ ,مِیر آلبرت)

(چالز $E.$ لاسیرسن ,۶.۰۴۶)، (۳.۰۹۱ ,سادوی دونالد)، ...}

به یاد داشته باشید که تعریف ۱. ۱ دقیقاً تعریف یک تابع است، مگر با این تفاوت که نیازی به شرایط تابع ندارد، که برای هر عضو دامنه، a، حداکثر یک جفت در آن گرافی که مختصات اول آن a باشد، وجود دارد. بنابر این یک تابع یک مورد خاص از یک رابطهٔ دوتایی است.

به رابطه‌ای که دامنه‌اش A و هم دامنه‌اش B باشد عبارات "حد فاصل A و B" یا " از A به B" اطلاق می‌شود. وقتی که دامنه و هم‌دامنه یک مجموعه باشند، A، به سادگی می‌گوئیم که رابطه "بر A" است. استفاده از نماد میانوند " aRb" برای این معنی که زوج (a,b) در گراف R قرار دارند عمومیت دارد.

۲. ۱ تصاویر و تصاویر معکوس

قبل از اینکه بیشتر جلو برویم، معرفی تعدادی نماد که مقدار زیادی نتیجه از آن بدست خواهیم آورد، ارزشمند است. اگر R یک رابطهٔ دوسویی از A به B باشد و C هر مجموعهٔ ممکن، تعریف می‌کنیم:

$$CR ::= \{b \in B \mid cRb \quad c \in C \ \text{به ازاء}\},$$

$$RC ::= \{a \in A \mid aRc \quad c \in C \ \text{به ازاء}\},$$

مجموعهٔ CR تصویر C تحت R گفته می‌شود. به یاد داشته باشید که اگر R یک تابع باشد، نماد $R(C)$ مربوط به هفتهٔ سوم یادداشتها هم تصویر C تحت R را شرح خواهد داد.

به مجموعهٔ RC تصویر معکوس C تحت R گفته می‌شود. متوجه برخورد دو نماد باشید وقتی که R یک تابع باشد: $R(C)=CR$، RC. از این بابت متأسفیم.

۳. ۱ پوشا و نظیر آن

رابطه‌ای با این خاصیت که هر عضو برد عضوی از دامنه مرتبط باشد. رابطهٔ پوشا (یا بر رو) می‌گویند.— بازهم، همان تعریف توابع را دارد. بطور مختصرتر ، یک رابطه ، R، از A به B پوشا

است اگر و فقط اگر $AR = B$ همینطور هم، به رابطه‌ای با این ویژگی که هر عضو دامنه با عضوی از برد مربوط باشد رابطهٔ کلی گفته می‌شود، بطور مختصرتر، R کلی است اگر و فقط اگر $A = RB$.

پاییز ۲۰۰۵ "رابطهٔ آموزشی" رابطه‌ای پوشا نیست از آن‌رو که هیچ یک از موضوعات ترم بهاره تدریس نمی‌شوند. کلی هم نیست، از آن‌رو که همهٔ گروه آموزشی عملاً در این ترم درس نمی‌دهند.

۲. روابط هم‌ارزی

یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعه‌ای از اجسام هنگامی اتفاق می‌افتد که همه آن چیزی که ما به آن اهمیت می‌دهیم یک نوع خاصیت داشته باشند مثلاً اندازه، شکل یا رنگ– اجسام مهم باشد بیش از آنکه به خود اجسام اهمیت بدهیم. می‌گوئیم که دو جسم با یک خاصیت مشابه "هم ارزند". البته که این همیشه اتفاق می‌افتد، چرا که روابط هم‌ارزی در همه جا ظاهر می‌شود. برای مثال، دو مثلث در صفحه هم‌ارز هستند اگر و فقط اگر طول سه ضلع آنها با هم برابر باشند. آنها مشابه هستند اگر و فقط اگر در هر سه زاویه یکی باشند.

نمایش– هم‌ارزی علوم رایانه به همانگونه که رابطهٔ میان انواع داده‌های مطلق متشابه اتفاق می‌افتد، مطرح می‌شود. برای مثال، ساده‌ترین روش به نمایش گذاردن یک مجموعهٔ متساعی از اعداد به مانند یک فهرست نامرتب است. دو فهرست (۵ ۱۷۷ ۲-۴ ۳) و (۵ ۴ ۳ ۲-۱۷۷) "نمایش هم‌ارز" هستند چون که هر دو یک مجموعه را دارند.

۱. ۲ هم‌ارزی توسط تابع

بطور مجزا، فرض می‌کنیم که تابعی وجود دارد که زوایا، اندازه یا رنگ، یا هـر نکـات دیگـری از عناصر که ما به آن علاقه‌مندیم را خلاصه می‌کند. دو عضو هم‌ارز در نظر گرفته می‌شوند که اگر و فقط اگر تابع مورد نظر یک مقدار را برای هر کدام در نظر بگیرد.

برای مثال، اگر f_c تابعی باشد که مثلثی به اندازه یالهایش بنگارد، آنگاه f_c رابطهٔ هم‌ارزی را معین می‌کند. اگر f_s تابعی باشد که مثلثی را به اندازه زوایایش بنگارد، آنگاه f_s رابطهٔ همسانی را معین می‌کند.

تعریف۱. ۲ یک تابع کلی f، را با دامنهٔ A در نظر بگیرید، رابطهٔ دو طرفه $\equiv f$ بر A با قـانون را تعریف کنید.

$$a \equiv Fb \quad iff \qquad f(a) = f(b) \qquad (۱)$$

به ازاء تمام $a,b \in A$.

یک رابطهٔ دوتایی رابطه‌ای هم‌ارزی است اگر fای یافت شودکه با رابطه $\equiv_F$ مساوی باشد

بنابر این هم‌ارزی مثلثها رابطه‌ای هم‌ارزی است زیرا رابطه $\equiv f_{c'}$ است، همانگونـه کـه همسـازی مثلثها هم‌ارزی است زیرا رابطه $\equiv f_s$ است. به همان گونه هم، نمایش– هم‌ارزی بر لیست اعـداد یک رابطهٔ هم‌ارز به حساب می‌آید زیرا برای $\equiv f_r$ است، جایی که f_r نمایشی را به مجموعـه‌ای که بیانگر آن است، طرح می‌سازد.

تمرین سریع: نشان دهید که رابطهٔ هم‌ارز بر اعضای یک مجموعه، A، عملاً رابطه‌ای هم‌ارز طبق تعریف ۱. ۲ با تشریح یک $I : A \to A$ است بطوری که شامل $I \equiv$ باشد.

به سنج n هم‌ارزی دیگر است که به جزئیات آن هنگامی اشاره خواهیم کرد که تئوری اعداد ابتدائی و نقش آن را در ابجدنویسی مدرن معرفی کنیم. اعداد صحیح k و m به سنج یک عدد صحیح $n > ۱$ هم‌نشت هستند و نوشته می‌شوند:

$$m \equiv k \quad (\text{به‌سنج } n,$$

اگر و تنها اگر m و k باقیمانده‌های برابری را در تقسیم به n داشته باشند. بنابر این به سنج n رابطه‌ای هم‌ارز است که در باقیمانده تقسیم– در – تابع n تعیین شده است. به این رابطه هم‌نهشتی گفته می‌شود زیرا با جمع کردن یا ضرب کردن اعداد صحیح هم‌ارز اعداد صحیح هم‌ارز دیگری بدست می‌آید. به این صورت،

لم.۲. ۲ اگر به سنج n $m_۲ \equiv k_۲$ و (به سنج n) $m_۱ \equiv k_۱$ آنگاه

$$m_۱ + m_۲ \equiv k_۱ + k_۲ \quad (\text{به‌سنج } n) \quad \text{و}$$

$$m_۱ m_۲ \equiv k_۱ k_۲ \quad (\text{به‌سنج } n)$$

از آنجائی‌که اثبات این لم بسیار ساده است به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

٢. ٢ افرازها

مجموعه‌ای را تکه تکه کردن و به چندین قسمت کردن را افراز کردن مجموعه می‌نامند. به قطعات بلوک افراز می‌گویند (قبلاً فکر می‌کردید که قطعات افراز را قسمت بنامیم، ولی در اشتباهید). به طور رسمی‌تر

تعریف ٢ .٣. افراز یک مجموعهٔ ، A، یک دسته‌بندی ، $\mathscr{A}$، از مجموعه‌های غیر تهی که تکه‌های افراز نامیده می‌شوند است بطوری که

١- $$A = \bigcup_{B \in \mathscr{A}} B$$

٢. اگر $B_1 \neq B_2$ بخش‌هایی از A باشند آنگاه B_1 و B_2 مجزایند.

به دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی با هم نداشته باشند، ار هم جدا می‌گویند، یعنی که اشتراک آنها تهی است.

مثال ٢ .٤. می‌توانیم اعداد صحیح را به ۴ تکه افراز کنیم بر این اساس که باقی ماندهٔ آنها در تقسیم به ۴ (٠,١,٢, یا ٣) باشد:

$\{0, 4, -4, 8, -8, 12, \ldots\}$

$\{1, -3, 5, -7, 9, -11 \ldots\}$

$\{2, -2, 6, -6, 10, -10, \ldots\}$

$\{3, -1, 7, -5, 11, -9, \ldots\}$

مثال ۲ .۵. می‌توانیم خط حقیقی را به تکه‌هایی با بریدن آن به نقاط صحیح افراز کنیم. مثلاً nامین افراز B_n، چنین خواهد بود $\{r\in \mathbb{R} \mid n\le r<n+1\}$

بنابر این Bn هم می‌تواند به مثابهٔ مجموعه اعداد حقیقی r توصیف شود که می‌شوند $\equiv f$ به n جایی که f تابع جزء صحیح است: $f\ (r)=[r]$ ، بزرگترین عدد صحیح $\ge r$.

مثال ۲ .٦. می‌توانیم پیکسل‌های یک تصویر را براساس رنگشان افراز کنیم (بنابر این بعضی جاها مابین ۲ و چند میلیون تکه خواهد بود و بستگی به این دارد که تصویر کاملاً سیاه و سفید یا "تمام رنگی" باشد.

رابطهٔ قرار داشتن در یک تکهٔ افراز رابطهٔ هم‌ارزی است. این رابطهٔ هم‌ارز است با تابعی که هر عضو را به تکه‌ای که در آن قرار دارد می‌برد. به صورت مشخص‌تر،فرض کنید $\mathscr{H}$ یک مجموعه را افراز می‌کند ، A، و تعریف می‌کنیم $[a]_{\mathscr{H}}$ تکه‌ای باشد که a در آن قرار دارد. بخاطر داشته باشید که هر $a\in A$ متعلق است به یک تکه‌ایکه در تعریف۱. ۳. ۲ آمده است.

فقط یک چنین تکه‌ای با تعریف ۲. ۳. ۲، وجود دارد، بنابر این $[a]_{\mathscr{H}}$ به طور غیر مبهمی برای هر عضو a معین می‌شود، بنابر این بودن در بلوک یکسان یک $\equiv blK$ است، در جایی که $blK\left(a\right)::=\left[a\right]_{\mathscr{H}}$.

بطور معکوس، یک رابطهٔ هم‌ارزی، $\equiv f$ با یک تابع کلی فرضی ، f، در یک مجموعه، A، افرازی از A را تعیین می‌کند، جایی که تکه دربردارندهٔ $a\in A$، $\{a' \mid f\ (a')=f\ (a)\}$ هست

برای مثال، چهار کلاس هم‌ارزی برای اعداد صحیح کمتر و هم‌نهشت بـه سـنج ۴ وجـود دارنـد. اینها دقیقاً تکه‌های افراز هستند که بر اساس باقی ماندۀ ۴ در مثال .٤. ۲ آورده شد.

بنابر این می‌توانیم یک رابطۀ هم‌ارز را از هر افرازی بدست آوریم و به طور معکوس،می‌توان افراز مشخص را برای هر رابطۀ هم‌ارزی معین کنیم. در واقع،مشکل نیست که ببینیـد شـما یـک رابطـۀ هم‌ارز را از یک افراز بدست آورید و آنگاه از افراز استفاده کنید تا یک رابطۀ هم‌ارز را معین کنید به همان رابطه هم‌ارزی می‌رسید که کار را با همان شروع کرده‌اید. همین طور هم، اگر افـرازی را از یک رابطه هم‌ارزی و مشخص کنید یک رابطۀ هم‌ارز از روی افراز بیابید، باز هم به همان جایی که شروع کرده‌اید باز می‌گردید. بنابر این افرازها و روابط هم‌ارزی روشهای قابـل تبـدیل‌انـد کـه درباره‌ی یک موضوع صحبت می‌کنند.

خلاصه کردن: نشانۀ روابط هم‌ارزی همان بررسی ویژگی از اشیاء مـورد نظـر اسـت. یـک رابطـۀ هم‌ارز تفاوتهای نامربوط میان اشیاء را پنهان می‌کند و به ما اجازه مـی‌دهـد کـه تمـام اشـیائی کـه "شبیه" هستند را یک جا جمع کنیم. بطور معکوس، هم‌ارزی با خاصیت بـودن در بلـوک، بطـور یکسان تعریف می‌شود.

۳. ۲ خاصیتهای روابط هم‌ارز

روابط هم‌ارزی خاصیت‌های بارزی دارند که بدلیل استفاده مکرر به آنها رسم می‌دهند:

تعریف .۷. ۲ یک رابطۀ دوتایی R بر یک مجموعۀ A دارای خاصیت‌های زیر است:

- بازتابی است اگر و تنها اگر به ازاء هر $a \in A,$

$$aRa,$$

- متقارن است اگر و تنها اگر به ازاء هر $a, a' \in A$,

aRa', ایجاب کند که $a'Ra$,

- متعدی است اگر و تنها اگر به ازاء هر $a, b, c \in A$,

$[aRb$ و $bRc]$ ایجاب کند که aRc

مثال ۲ .۸ فرض کنید $R۱$ رابطه کوچکتری > در اعداد طبیعی باشد، آنگاه $R_۱$ متعدی است (از آنجا که $([j < k, k < l] \Rightarrow j < l)$ اما انعکاسی نیست (از آنجا که ۰>۰ غلط است) و متقارن هم نیست (از آنجا که ۱>۰ ولی ۰≮۱).

مثال ۲ .۹ می‌دانیم که اگر A, B, C مجموعه باشند و $A \subset B$، $B \subset C$، داریم $A \subset C$. رابطهٔ زیر مجموعهٔ سره بودن است، ⊂، متعدی است. انعکاسی نیست (از آنجا که یک مجموعه هیچ‌گاه زیر مجموعهٔ سره خود نیست) و متقارن نیست (برای مثال، مجموعهٔ تهی زیر مجموعهٔ هر مجموعهٔ غیر تهی است، ولی برعکس نمی‌شود).

مثال ۲ .۱۰ فرضاً که $R_۲$ رابطهٔ "دلالت می‌کند بر" در مجموعه فرمول گزاره‌ای باشد، یعنی $p \ \ R_۲ q$ اگر و تنها اگر $p \rightarrow q$. اینک $R_۲$ انعکاسی است. از آنجا که $p \rightarrow p$ معتبر است. با این همه، متقارن نیست، از آنجا که، برای مثال صحیح → غلط معتبر است، ولی غلط → صحیح معتبر نیست.

مثال ۲ .۱۱. فرض کنید R_3 رابطهٔ مجموعه‌های C,D در اعداد طبیعی باشد بطوری که CR_3D اگر و تنها اگر $C\bigcap D$ متناهی باشد. آنگاه R_3 متقارن است، ولی انعکاسی نیست (برای مثال $\mathbb{N}R\mathbb{N}$ متناهی نیست).

تمرین سریع: توضیح بدهید چرا R_3 متعدی نیست.

مثال۱۲. ۲ فرضاً که R_4 رابطه‌ای روی اعداد مختلط باشد که aR_4b باشد اگر و فقط اگر فاصلهٔ a تا b در صفحه مختلط ۱≥ باشد یعنی، $|a-b|\leq 1$. آنگاه R_4 انعکاسی و متقارن است، ولی متعدی نیست (چون که $1R_4 2$ و $2R_4 3$ ولی $1R_4 3$ نمی‌شود).

به خاطر داشته باشید که رابطهٔ تساوی در مجموعهٔ A انعکاسی، متقارن، و متعدی است. این را ثابت نمی‌کنیم – این یک اصل است. این خصوصیات در تساوی بطور مستقیم برای هر رابطه هم‌ارزی نیز برقرار است.

لم ۲ .۱۳. هر رابطهٔ هم‌ارزی انعکاسی، متقارن، و متعدی است.

برهان. یک رابطهٔ هم‌ارزی $\equiv_f$ که با تابع f با دامنهٔ A مشخص می‌شود را در نظر بگیرید. از آنجا که $f(a)=f(a)$، به طور بدیهی $\equiv_f$ انعکاسی است. همین طور هم، اگر $f(a)=f(a')$ پس $f(a')=f(a)$، که دلالت می‌کند بر $\equiv_f$ متقارن است، بالاخره، اگر $f(a)=f(b)$, $f(b)=f(c)$، داریم $f(a)=f(c)$، که دلالت دارد که $\equiv_f$ متعدی است.

۳. ۲ همارزی با اصول

خصوصیات انعکاسی، تقارن، و تعدی عملاً یک توصیف اصولی عالی از روابط همارزی را فراهم می‌کند. (در واقع، اکثر مؤلفین روابط همارزی را با استفاده از این اصول مشخص می‌کنند ولـی مـا فکر می‌کنیم که راه حل ما بیشتر با عقل جور در می‌آید)

قضیه ۱۴. ۲ رابطه‌ای در مجموعه‌ای که انعکاسی، متقارن و متعدی باشـد در آن مجموعـه رابطـۀ همارزی است.

برهان. فرض کنید R در یک مجموعه ، A، رابطه‌ای انعکاسی ،متقارن، و متعدی باشد. تـابع ، f، را با دامنهٔ ، A، مشخص کنید با استفاده ار ضابطه‌ی $f(a)::=\{a\}R$ تعریف می‌کنیم.

ثابت می‌کنیم که $R \equiv f$ و از این رو R یک رابطهٔ همارزی است. یعنی باید نشان بدهیم که

$$aRb \text{ اگر و فقط اگر } \{a\}R = \{b\}R \qquad (۲)$$

برای همه $a,b \in A$.

ابتدا (۲) را از سمت راست به چپ ثابت می‌کنیم. مثلاً، فرض کنید $\{a\}R = \{b\}R$. از آنجـا کـه R انعکاسی است، داریم $b \in \{b\}R$.این معنایش آن است که $b \in \{a\}R = \{b\}R$. بنابر ایـن از تعریف $\{a\}R$ داریم aRb که برهان را از راست به چپ کامل می‌کند.

برای اثبات حالت معکوس، فرض کنید

$$aRb \qquad (۳)$$

در ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$\{b\}R \subseteq \{a\}R \qquad (٤)$$

برای انجام این کار، فرض کنید c عضوی از $\{b\}R$ باشد؛ باید نشان دهیم که $c \in \{a\}$. ولی با توجه به تعریف $\{b\}R$، می‌دانیم که،

$$bRc. \qquad (٥)$$

ولی (۳) و (٥) با هم دلالت می‌کنند بر aRc زیرا R متعدی است. بنابر این از تعریف $\{a\}R$ داریم $c \in \{a\}R$.

این (٤) را ثابت می‌کند.

سرانجام، (۳) دلالت دارد بر bRa، چون که R متقارن است. بنابر این با همان اثباتی که برای (٤) بکار رفته است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\{a\}R \subseteq \{b\}R.$$

ولی این رابطه با (٤) دلالت دارد بر $\{a\}R = \{b\}R.$، تکمیل برهان (۲) از چپ به راست. □

نشان دادیم که هر یک از سه خصوصیت روابط هم‌ارز در این برهان کارایی داشتند. ارزیابی کردن اینکه یک برهان از تمامی فرض‌های در دسترس بهره می‌برد یک "بررسی درستی" اثبات است— اگر یکی از خصوصیات مفروض در برهان بکار نرود، پس یا شما اشتباه کرده‌اید یا اینکه قضیه قوی‌تری از آنچه می‌پنداشتید ثابت کرده‌اید. برای مثال، اگر هیچ کجا در برهان قضیه ١٤. ٢ از فرض انعکاسی استفاده نکرده باشید، ثابت کرده‌اید که هر رابطهٔ متقارن و متعدی یک رابطهٔ

هم‌ارزی است، که غلط است. بنابر این برهانی که از خاصیت انعکاسی استفاده نکند باید اشتباه باشد.

این اصول حداقل در چندین روش سودمندند. اول، موقعیتهایی وجود دارد که یافتن تابع f که یک رابطهٔ هم‌ارز را مشخص کند، سخت است. قضیه ١٤. ٢ ما را قادر می‌سازد تا برای نشان دادن هم‌ارزی یک رابطه از طریق ارزیابی خصوصیات، بازتابی ،متقارن، و متعدی عمل کنیم.

مسئله ١. دو موقعیت از مهره‌های بازی شطرنج را متقابلاً قابل دسترسی گوئیم هرگاه در صورت امکان از هر یک شروع شود به وسیلهٔ یک دنباله از حرکات قانونی شطرنجی به دیگری منتهی شود. ما هیچ روش سودمندی برای تشریح یک تابع f در نظر نداریم، که قابلیت دسترسی متقابل مساوی با $\equiv_f$ باشد ثابت کنید که به هر حال قابلیت دسترسی متقابل یک رابطهٔ هم‌ارز است.

دوم، برای ثابت کردن اینکه رابطه‌ای هم‌ارزی نیست با استفاده از تعریف، باید نشان دهیم که برای هر تابع ممکن f رابطه با $\equiv_f$ برابر نیست، بی‌مقدمه، این کار نیازمند تحلیلی شجاعانه به منظور غیر متحمل ساختن کلیهٔ توابع است. ولی قضیه ١٤. ٢ می‌گوید که ما همیشه می‌توانیم نشان دهیم که یک رابطه، به سادگی با یافتن دو یا سه عضو دامنه که اصول را لغو می‌کنند نشان دهیم که رابطه هم ارزی نیست.

۳. جزعاً مرتب

روابط جزئاً مرتب، گروه دیگری از روابط دوتایی هستند که بطور ویژه‌ای در علوم کامپیوتر اهمیت دارند، با کاربردهایی که در برنامه‌نویسی، کنترل اطلاعات پایهٔ متقارب و اثبات اینکه کی محاسبه پایان می‌گیرد.

یک مثال عمومی دربارهٔ ترتیب‌جزئی رابطهٔ زیر مجموعه بودن در مجموعه‌ها است ،$\subset$، در واقع، ما از طریق رابطهٔ زیر مجموعه بودن، در بسیاری موارد از همان روشی که روابط هم‌ارزی را معین می‌کنیم، ترتیبهای‌جزئی را معین خواهیم کرد. مثلاً، برای هر عضو ، a، به یک تابع فکر می‌کنیم، g، طوری که $g\,(a)$ مجموعهٔ خصوصیاتی است که a دارد. پس ما اجزاء مختلف را بر طبق چگونگی مقایسهٔ خصوصیاتشان به هم مرتبط می‌کنیم. تمام ترتیبهای‌جزئی با این روش تولید می‌شوند.

۱. ۳ ترتیب‌جزئی با استفاده از تابع

برای ترتیبات‌جزئی اغلب از نمادهای $\prec$ یا $\preceq$ استفاده خواهیم کرد برای اینکه آنها شبیه نمادهایی هستند که در زیر مجموعه‌ها و کوچکتر یا مساوی استفاده می‌شوند و اینها ترتیبهایی‌جزئی هستند، که بیشترین کاربرد را دارند. (روابط معمولاً بوسیله حرفی مثل R نوشته می‌شوند در عوض یک نماد پیچ در پیچ مرموز، بنابر این $\le$ نوعی شبه شاهزاده است.)

تعریف ۱. ۳ فرض کنیم g تابع کلی از یک مجموعه ، A، به دسته‌ای از مجموعه‌هاست، رابطهٔ دوتائی $\prec_g$ بر A را با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$a \prec_g b \text{ اگر و فقط اگر } g(a) \subset g(b) \qquad (٦)$$

برای هر $a \neq b \in A$. یک رابطهٔ دوتائی ، R، روی یک مجموعه ، A، یک ترتیب‌جزئی است اگر و فقط اگر یک g وجود داشته باشد بطوری که R با $\prec_g$ برای هر جفت عناصر مجزا مساوی باشد. یعنی،

$$aRb \text{ اگر و فقط اگر } a \prec_g b \qquad (٧)$$

برای تمام $a \neq b \in A$

یک نتیجهٔ فوری از تعریف ۱. ۳ آن است که رابطهٔ زیر مجموعه خود یک ترتیب‌جزئی است. به طور خاص، اگر A گروهی از مجموعه‌ها باشد، آنگاه رابطهٔ زیر مجموعهٔ سره بودن ،$\subset$، یک ترتیب‌جزئی بر A است، برای اثبات آن فرض می‌کنیم I_A تابع همانی بر A باشد. آنگاه $\prec_{I_A}$ رابطه ایست مثل $\subset$، و بنابر این بطور بدیهی واجد شرایط (٦) بر R می‌شود. رابطهٔ زیر مجموعه در- یا- مشمول، $\subseteq$، هم یک ترتیب‌جزئی است، از آنجایی که به ازای $a \neq b$ با $\prec_{I_A}$ موافقت دارد.

شناخته شده‌ترین مثالهای ترتیبهای‌جزئی، روابط "کوچکتر از" هستند، برای مثال ،رابطهٔ، $<$ در اعداد حقیقی. برای اینکه ببینیم $\prec$ یک ترتیب‌جزئی است کافی است $h(r) ::= \{q \in Q \mid q < r\}$ را تعریف می‌کنیم. از آنجا که یک عدد گویا میان هر دو عدد حقیقی وجود دارد (برای دیدن این

موضوع، فکر کنید به اینکه کجا ابتدای تفاوت بسط اعشاری آنها است) در می‌یابیم که $>$ به سادگی $\prec_h$ است. همینطور هم ،رابطهٔ، $\leq$، یک ترتیب‌جزئی است زیرا که با $\prec_h$ به ازاء کلیه جفتهای اعداد حقیقی مجزا مطابقت دارد.

تعریف عمومی ما از ترتیب‌جزئی، اینکه آیا عناصر به خودشان بستگی داشته باشند را نامشخص می‌گذارد.

تعریف ۲. ۳ به یک ترتیب‌جزئی ضعیف می‌گویند اگر و تنها اگر انعکاسی باشد. بنابر این،برای مثال، رابطهٔ $\leq$ در اعداد حقیقی، و رابطهٔ $\subseteq$ بر مجموعه‌ها، ترتیب‌های جزئی ضعیف هستند.

تعریف ۳. ۳ یک رابطهٔ دوتایی ، R، در مجموعه A، غیر انعکاسی است اگر و فقط اگر برای تمام $a \in A$، aRaبرقرار نباشد. یک ترتیب‌جزئی اکید است اگر و فقط اگر غیر انعکاسی باشد. رابطهٔ $<$ در اعداد حقیقی ،$\subset$، در زیر مجموعه‌های سره ترتیب‌های‌جزئی اکید هستند. به طور کلی، یک ترتیب جزئی ممکن است نه ضعیف باشد نه اکید؛ این وقتی اتفاق می‌افتد که برخی از اجزاء به خود وابسته‌اند و برخی دیگر نباشند.

دومثال بیشتر از ترتیب‌های جزئی ارزش یادآوری دارند:

مثال ٤. ۳ فرض کنید که A دسته‌ای از مجموعه‌هاست و تعریف کنید aRb اگر و فقط اگر $a \supset b$. آنگاه R یک ترتیب‌جزئی اکید است.

برهان. تعیین کنید $P(a) ::= \bar{a}$، جایی که $\bar{a}$ مکمل a است و به یادداشته باشید که

$[aRb]$ اگر و فقط اگر $[a \supset b]$ اگر و فقط اگر $\left[\bar{a} \subset \bar{b}\right]$ اگر و فقط اگر $\left[P(a) \subset P(b)\right]$.

بنابر این R مساوی است با $\prec_p$ و بر همین اساس یک ترتیب‌جزئی است. اکید است از آنجائی که هیچ مجموعه‌ای یک زیر مجموعهٔ سره‌ی خود نیست. □

برای اعداد صحیح ، m، n، می‌نویسیم $m|n$ به این معنی که در تقسیم n بر m، عدد صحیحی مثل k داریم به طوری که $n = km$.

مثال ۳ .۵ رابطهٔ‌تقسیم یک ترتیب‌جزئی ضعیف در اعداد طبیعی است.

برهان. در نظر بگیرید $v(n)$ =:: مساوی است با مجموعهٔ اعداد طبیعی که بر n تقسیم می‌شوند پس تقسیم $\prec_v$ است و بنابر این یک ترتیب‌جزئی است. از آنجا که $m|m$، یک ترتیب‌جزئی ضعیف است. □

۳ .۲ ترتیب‌های کلی

روابط ترتیبی آشنا در اعداد، خاصیتی مهم و افزوده دارند: برای هر دو عدد فرضی، یکی از دیگری بزرگتر خواهد بود. ترتیب‌های‌جزئی که این خاصیت را داشته باشند ترتیب‌های کلی نامیده می‌شوند.[۱]

تعریف ۳ .٦ فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی در مجموعهٔ A است، فرض که b و a اعضاء A باشند. آنگاه b,a قابل مقایسه‌اند با در نظر گرفتن رابطه R اگر و فقط اگر (bRa یا aRb). به یک ترتیب‌جزئی که در آن هر دو عضو جدا از هم قابل مقایسه باشند کاملاً مرتب می‌گویند.

۱. هنگامی که درباره ترتیب‌های‌جزئی صحبت می‌کنیم "کلی" واژه یا عبارتی است که معنایی افزون دارد: ترتیب کلی بودن از ترتیب‌جزئی شرط قوی‌تری است که یک رابطهٔ کلی است. برای مثال، هر ترتیب جزئی ضعیف مثل $\subseteq$ یک رابطهٔ کلی است.

بنابر این $>$ و $\leq$ در $\mathbb{R}$ کاملاً مرتب هستند. از سوئی دیگر، رابطهٔ زیر مجموعه بودن عموماً کـاملاً مرتب نیست: هر دو مجموعهٔ متناهی مجزای هم‌اندازه تحت $\subseteq$ غیر قابل مقایسه خواهند بود.

۳. ۳ خصوصیات ترتیب‌های جزئی

قبلاً مشاهده کرده‌ایم که رابطهٔ زیر مجموعه بودن متعـدی اسـت، کـه دلالـت دارد بـر اینکـه هـر رابطهٔ، $\prec_g$، متعدی است. بنابر این با تعریف ۷ داریم:

لم ۷. ۳ هر رابطه جزئاً مرتب متعدی است.

یک خصوصیت دیگر از رابطهٔ زیر مجموعه برای مشخص کردن ترتیب‌های‌جزئی کافی است.

تعریف ۸. ۳ یک رابطهٔ دوتایی ، R، در مجموعه A باشد، پاد متقارن است اگر

aRb مستلزم آن باشد که $\neg(bRa)$ به ازاء تمام $a \neq b \in A$.

لم ۹. ۳ هر مجموعه جزعاً مرتب پاد متقارن است

برهان. فرض کنید R ترتیبی‌جزئی بر A است. بنابر این یک تابع مجموعـه مقـدار کلـی ، g، بـا دامنهٔ A وجود دارد که R با $\prec_g$ بر زوجهای دارای عضوهای مجزا در A یکسانند. می‌خواهیم نشان بدهیم که aRb و bRa هر دو نمی‌توانند بر اعضای $a \neq b$ صدق کننـد. ولـی اگـر هـر دو صدق کنند، آنگاه (٦) دلالت خواهد کرد که $g(a)$ و $g(b)$ زیر مجموعه‌های سره‌ی یکدیگرند، که غیر ممکن است. □

٤. ۳ ترتیب‌های‌جزئی با اصول

خصوصیات تراگذاری (تعدی) و پاد متقارن بودن توصیفی اصولی از ترتیب‌هـای جزئـی فـراهم می‌کند:

قضیه ۱۰. ۳ یک رابطهٔ دوتایی ترتیبی‌جزئی است اگر و فقط اگر تعدی و پاد متقارن باشد.

برهان. فرض کنید که R یک رابطهٔ دوتایی بر مجموعهٔ A باشد. آنگاه بنابر دو لم از پـیش گفتـه شده قضیه ۱۰. ۳ از چپ به راست اثبات می‌شود.

برای اثبات قضیه از سمت راست به چپ، در نظر بگیرید که R تعدی و پاد متقارن باشد. تعریف کنید:

$$g(a) ::= R\{a\} \cup \{a\} \qquad (۸)$$

ادعا می‌کنیم R جزئی است زیرا با g $\prec$ بر اجزاء مجـزای A سـازگار اسـت. یعنـی اینکـه اگـر $a \neq b \in A$ باشد، آنگاه

$$aRb \text{ اگر و فقط اگر } g(a) \subset g(b) \qquad (۹)$$

برای اثبات (۹) از سمت راست به چپ به خاطر داشته باشید که

زیرا از ۸ داریم $a \in g(a)$ $\quad g(a) \subset g(b) \Rightarrow a \in g(b)$

(با توجه به تعریف $g(b)$) $\Rightarrow a \in R\{b\} \cup \{b\}$

(از آنجا که $a \neq b$) $\Rightarrow a \in R\{b\}$

(با توجه به تعریف $R\{b\}$) $\Longrightarrow aRb$

برهان (۹) از چپ به راست هم به صورت روتین از تعاریف کمی طولانی بدست می‌آید، که به صورت خاص این استدلال آموزنده نیست، و از آن می‌گذریم. □

در کتاب‌ها، ترتیب‌های‌جزئی معمولاً به طور اصولی قضیهٔ ۱۰. ۳ تعریف می‌شوند،و آنگاه احتمال نمایش دوباره ترتیب‌های‌جزئی مانند $\prec g$ به عنوان یک قضیه ثابت می‌شود. از آنجا که دو توصیف با یکدیگر معادلند، دیگر به سلیقه مربوط است که کدام یک را به عنوان تعریف بکار ببرید.

ترتیب‌های‌جزئی اکید حتی خصوصیات اصولی ساده‌تری دارند.

قضیه ۱۱. ۳. یک رابطهٔ دوتایی، ترتیبی‌جزئی اکید است اگر و فقط اگر متعدی و غیر انعکاسی باشد.

مسئله ۲. قضیه۱۱. ۳ را ثابت کنید. راهنمایی: نشان بدهید که تعدی و غیر انعکاس، پاد متقارن را ایجاب می‌کند.

برای ترتیب‌های‌جزئی ضعیف، اغلب نمادی شبه- ترتیبی نظیر $\preceq$ را به جای حرف نماد R می‌نویسیم. همینطور هم، بطور کلی از $\prec$ برای یاد کردن از ترتیب‌جزئی اکید استفاده می‌کنیم. همچنین می‌نویسیم $b \succeq a$ به معنی $a \preceq b$ و $b \succ a$ به معنی $a \prec b$.

۵. ۳ حاصل‌ضرب‌ها و تحدید روابط

حاصل‌ضرب و تحدید روابط دو روش ساختن رابطه‌های جدید از رابطه‌های قدیم است که مفید خواهند بود.

۱. ۵. ۳ حاصل‌ضرب

حاصل‌ضرب ، $R_1 \times R_2$، از رابطه‌های R_1 و R_2 به عنوان رابطه‌ای با

دامنهٔ $(R_1 \times R_2)$ =:: دامنه (R_1) × دامنه (R_2)

هم‌دامنهٔ $(R_1 \times R_2)$ =:: هم‌دامنه (R_1) × هم‌دامنه (R_2)

$(a_1, a_2)\ (R_1 \times R_2)\ (b_1, b_2)$ اگر و فقط اگر $[a_1 \ R_1 \ b_1$ و $a_2 \ R_2 \ b_2]$ تعریف می‌شود.

مثال۱۲. ۳ رابطه‌ای Yروی زوج سن– قد ، مبتنی بر جوانتر و کوتاه‌تر بودن. در نظر بگیرید رابطه‌ای است بر مجموعه زوجهای (y, h)، جایی که y یک عدد طبیعی است ≤۲۴۰۰ که ما آن را به عنوان تعداد ماه‌های عمر در نظر می‌گیریم و h عددی طبیعی است ≤۱۲۰ که بیانگر قد به اینچ است. ما y را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$(y_1, h_1) Y (y_2, h_2)$ اگر و فقط اگر $y_1 \leq y_2 \wedge h_1 \leq h_2.$

یعنی که، Y حاصل‌ضرب رابطهٔ ≤ بر سن و نسبت ≤ بر قد است.

حاصل‌ضرب‌ها بسیاری از خواصی را که در نظر گرفته‌ایم حفظ می‌کنند. مثلاً، اثبات اینکه اگر $R1$ و $R2$ هر دو متعدی باشند، آنگاه $R1 \times R2$ هم تراگذر است، سخت نیست. همان رابطه در مورد تقارن ،بازتاب، و پاد متقارن هم صدق می‌کند. این گفته دلالت می‌کند که اگر $R1$ و $R2$ هر دو ترتیب‌های‌جزئی باشند. $R1 \times R2$ هم همینطور است. همینطور هم برای رابطه‌های هم‌ارزی.

تمرین سریع: بررسی کنید که اگر هر یک از $R1$ یا $R2$ غیر انعکاسی باشد، آنگاه $R1 \times R2$ هم همینطور است.

از طرفی دیگر، خصوصیات یک ترتیب‌کلی بودن حفظ نمی‌شود برای مثال، رابطه سن– قد Y حاصل‌ضرب دو ترتیب کلی است، ولی خود کلی نیست. برای مثال، عمر ٢٤٠ ماه، قد ٦٨ اینچ جفت ،(٦٨، ٢٤٠) و جفت (٧٢ و ٢٢٨) تحت Y غیر قابل مقایسه‌اند.

٢. ٥. ٣ تحدیدها

معمولاً به رابطهٔ "کمتر از" ، "<" بر اعداد حقیقی، یا اعداد گویا، یا اعداد صحیح فکر می‌کنیم. از نظر تکنیکی (فنی). اینها نسبت‌های مختلفی هستند زیرا دامنه‌ها و گراف‌های مختلفی دارند، ولی ارتباط آشکاری در میان است: ترتیب < بر، مثلاً اعداد گویا، توسط محدود کردن ترتیب حقیقی به زیر مجموعه اعداد گویا بدست می‌آید.

تعریف ٣ .١٣ فرض کنید که R رابطه‌ای بر یک مجموعه ، A، باشد، و فرض کنید که B ،زیر مجموعهٔ A باشد. تحدید R به B رابطه‌ای است بر B که گراف آن گراف $(R)\bigcap(B\times B)$ است.

محدود سازی‌ها، فقط می‌کند بسیاری از خصوصیات رابطه را در حفظ می‌کند. برای مثال، محدود سازی متعدی بودن را حفظ می‌کند، یعنی که اگر R متعدی باشد، آنگاه هر گونه محدود سازی R هم از این قرار است. محدودیت همچنین تقارن، پاد تقارن، عدم تقارن، انعکاس، و نامنعکس بودن را حفظ می‌کند. این بیان می‌کند که تحدید یک رابطهٔ هم‌ارزی یک رابطهٔ هم‌ارزی است و تحدید یک ترتیب‌جزئی است.

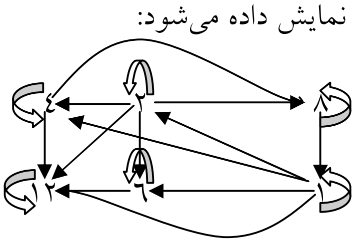
ولی تحدید تمام خصوصیات رابطه را که تا حالا در نظر گرفته‌ایم حفظ نمی‌کند. برای مثال، یک رابطهٔ پوشا بودن و یک رابطهٔ کلی بودن بوسیلهٔ تحدید حفظ نمی‌شود.

استدلال‌های این ادعاها را به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم؛ همگی آسانند.

٤. گراف‌های جهت‌دار

یک گراف جهت‌دار (که مختصراً دیگراف) به طور ظاهری همانند یک رابطهٔ دو تایی بر یک مجموعه ، A است، ولی ما دیگراف را به شکل هندسی با نمایش اعضای A به شکل نقاطی بر صفحه به تصویر می‌کشیم، با یک فلش از نقطه‌ای که a باشد به نقطه‌ای که b باشد دقیقاً وقتی که aRb اعضای مجموعهٔ A به عنوان رئوس دیگراف(گراف جهت‌دار) در نظر گرفته می‌شوند.

مثال١. ٤ رابطهٔ بخش‌پذیری بر {١،٢،...،١٢} با این گراف نمایش داده می‌شود:



<u>شکل تصحیح شود</u>

[صفحه ١١ متن اصلی، فصل چهارم]

١. ٤ مسیرها در گراف‌های جهت‌دار

تعریف ٢. ٤ یک مسیر در گراف جهتدار، R، عبارت است از، دنباله‌ای از رئوس $a_0,\ldots a_k$ با $k \geq 0$ به طوری که $a_i \; R \; a_{i+1}$ برای هر $0 \leq i < k$.

می‌گوییم مسیر از a_0 شروع و به a_k، ختم می‌شود و طول مسیر k تعریف می‌شود. مسیر $a_0,\ldots a_k$ که با نقطه و فلش به تصویر در آمده است، به نظر شبیه به خطی می‌آید که در نقطهٔ

a_0 شروع شود و فلشها را در میان نقاط متوالی دنبال می‌کند تا در نقطهٔ a_k بـه پایـان برسـد. بـه خاطر داشته باشید که یک نقطهٔ تنها به عنوان یک مسـیر بـا طـول صـفر اسـت (ایـن فقـط بـرای آسودگی است).

بسیاری از خصوصیات رابطه ضرح‌های هندسی به شکل عبارت‌های گراف‌های جهتدار دارند.

برای مثال:

انعکاسی: تمام رئوس خود طوقه دارند (طوقه در یک نوک پیکانی است که از نـوک شـروع و بـه خود آن ختم می‌شود).

عدم انعکاسی: هیچ رأسی طوقه ندارند.

تقارن: همهٔ یال‌ها دارای دو سمت هستند.

تعدی: مدارهای– کوتاه– برای هر مسیری که از گراف بگذرد، یک نوک پیکان از اولـین رأس بـه آخرین رأس مسیر وجود دارد.

می‌توانیم تعدادی رابطه‌های جدید بر اسـاس مسـیرها تعیـین کنـیم. فـرض کنیـد کـه R گـراف جهتداری با رئوس A باشد. نستبهای R^* و R^+ را برای A با این شروط تعریف کنید که

$a \ R^*b ::=$ مسیری در R از a به b وجود دارد

$a \ R^+b ::=$ یک مسیر به طول مثبت در R از b به a وجود دارد

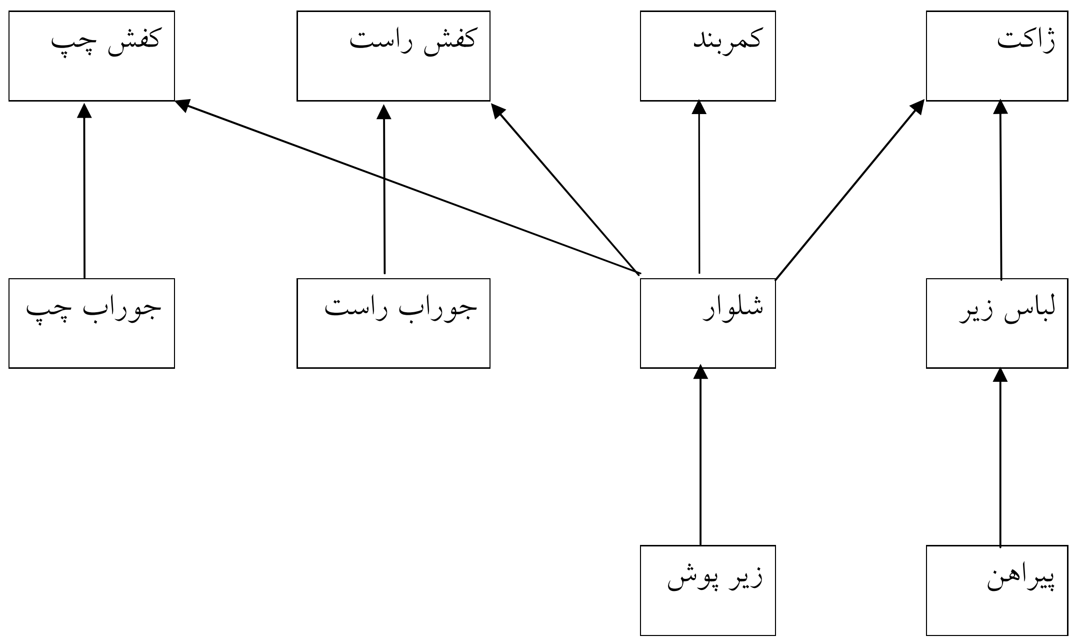
R^* رابطهٔ مسیر از Rخوانده می‌شود. از تعریف مسیر داریم که R^* متعدی است. همچنین بازتابی است (بدلیل مسیرهای طول صفر) و شامل گراف R است (به دلیل مسیرهای طول یک).

R^+ رابطهٔ مسیر طول مثبت خوانده می‌شود؛ همچنین حاوی گراف (R) و متعدی است.

۲. ٤ گراف‌های بدون دور جهت‌دار

برنامه‌ریزی از مسائل معمول ترتیب‌های جزئی است: مجموعه‌ای از کارها، A، و مجموعه‌ای از قیدها که مشخص می‌کننده که شروع یک کار معینی را بستگی به کارهای دیگری دارد که پیش از آن کامل شده‌اند، ما کارها را بوسیلهٔ رئوس و این قید که کار a باید قبل از کار b خاتمه یابد را با یک پیکان از a به b مشخص می‌کنیم.

مثال ۳. ٤ در اینجا گرافی است که ترتیبی برای لباس پوشیدن شما را توصیف می‌کند. کارها همان لباسهایی هستند که باید پوشیده شوند، و یالها تعیین می‌کنند چه لباسی باید قبل از چه لباسی پوشیده شود.



وابسته به گراف یک ترتیب‌جزئی روی کارها را ایجاد می‌شود. ولی چه اتفاقی می‌افتد اگر یک یال رابط از کمر بند به زیرپوش اضافه کنیم؟در آن حالت وابستگی گراف فاقد معنا می‌شود: دیگر راهی برای لباس پوشیدن نیست! آنچه باعث اشتباه می‌شود این است که یال اضافه شده یک وابستگی "دوری"ایجاد می‌کند.

تعریف ٤. یک دور مسیر طول مثبتی در گراف جهت‌دار است که در یک رأس شروع و پایان می‌یابد. یک گراف غیر دور جهت‌دار (DAG) گرافی جهت‌دار بدون دور است. بنابر این یک گراف متناظر کار بهتر می‌بود DAG باشد تا اینکه کارهایش به ترتیب انجام شدنی باشند تا اینکه بتوان وابستگی‌های کاری را در نظر گرفت.

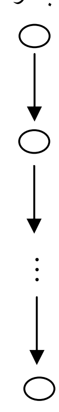
ما از DAG به مثابهٔ روشی اقتصادی بهره می‌گیریم تا رابطهٔ وابستگی را نشان دهیم. معمولاً یک گراف‌- کاری DAG رابطه‌ای متعدی نیست زیرا فقط یالهایی را در بر می‌گیرد که بیانگر وابستگی‌های "مستقیم" باشند. باز هم، رابطهٔ وابستگی که ما به آن اهمیت می‌دهیم بوسیله رابطهٔ مسیر طول مثبت ، R^+، در گراف کاری معین می‌شود. رابطهٔ وابستگی همیشه یک ترتیب‌جزئی خواهد بود:

لم ۵. ٤ اگر D یک DAG باشد، آنگاه D^+ یک ترتیب‌جزئی اکید است.

برهان. می‌دانیم که D^+ تعدی است. همچنین، یک مسیر به طول مثبت از یک رأس به خود آن هم یک دور است، بنابر این چنین مسیرهایی وجود ندارند. معنایش این است که D^+ غیر انعکاسی است و بنابر این براساس قضیهٔ ۱۱. ۳ ،یک ترتیب‌جزئی اکید است. □

۳. ٤ طبقه‌بندی توپولوژیک

در یک DAG برای ترتیب‌جزئی، اجزاء غیر قابل مقایسه به مثابه رئوسی هستند که بینشان مسیری در هیچ جهتی ظاهر نمی‌شود. بنابر این دربارهٔ ترتیب‌جزئی لباس‌پوشیدن در مثال ۳. ٤ "کفش چپ" و "کفش راست" غیر قابل مقایسه‌اند. اگر ترتیب کلی باشد، اجزاء غیر قابل قیاس وجود ندارند، و ترتیب را می‌توان بوسیلهٔ یک DAG که شبیه یک خط است نمایش داد:



وقتی که ما یک ترتیب جزئی کارها برای انجام دادن داریم، برخورداری از ترتیبی که در آن تمام کارها در زمانی انجام بگیرد مفید است، در حالی که به قیدها هم پایبندیم. این یعنی یافتن ترتیب کلی که با ترتیب‌جزئی سازگار است. این کار یافتن یک ترتیب کلی که با ترتیب‌جزئی سازگار است طبقه‌بندی توپولوژیکی نامیده می‌شود.

تعریف ٤ .٦ یک دسته‌بندی توپولوژیکی از یک ترتیب‌جزئی $\prec$، روی یک مجموعه، A یک ترتیب کلی ð روی A است به طوری که

$a \subset b$ ایجاب می‌کند که $a < b$

برای مثال، کفش راست ð کفش چپ ð شلوار ð جوراب راست ð جوراب چپ ð زیرپوش ð لباس‌زیر ð پیراهن ð ژاکت ð کمربند ð یک دسته بندی توپولوژیک است از ترتیب‌جزئی پوشیدن لباس توسط DAG مثال ٤.٣ است به همین قرار هم دسته‌بندی‌های ممکن دیگری وجود دارد.

ساختن دسته‌بندی های توپولوژیک برای DAGهای پایان‌پذیر آسان است که با عناصر کمینه شروع می‌شوند.

تعریف ٤ .٧ فرض کنید $\preceq$ یک ترتیب‌جزئی بر مجموعهٔ A باشد، و فرض کنید a یک عضو A باشد. a کمینه است اگر و فقط اگر هیچ عضو دیگری نباشد که از a کوچکتر یا مساوی باشد به طور مشابه a بیشینه است اگر و فقط اگر هیچ عضو دیگرینباشد که از a بزرگتر یا مساوی باشد.

در ترتیب کلی، فقط یک عضو کمینه می‌تواند وجود داشته باشد، ولی در کل بیش از یک عضو کمینه می‌تواند در یک ترتیب‌جزئی وجود داشته باشد. در مثال مربوط به پوشاک چهار مورد وجود دارند: جوراب چپ، جوراب راست، زیرپوش و پیراهن. برای ساختن یک ترتیب کلی در لباس پوشیدن، یکی از اعضای کمینه موجود را بر می‌داریم، مثلاً پیراهن را. سپس یک عضو کمینه را از میان باقی‌مانده‌ها برمی‌داریم. برای مثال، اگر پیراهن را برداریم، لباس‌زیر به صورت کمینه در می‌آید به همین منوال به طور متوالی اعضاء کمینه را برمی‌داریم تا اینکه تمامی اعضاء برداشته شوند. دنبالهٔ اجزاء به ترتیبی که برداشته شده‌اند یک دسته‌بندی توپولوژیک خواهد شد. این نشان می‌دهد که طبقه‌بندی فوق‌الذکر برای لباس پوشیدن چگونه بنا شده است.

برای این روش طبقه‌بندی توپولوژیک در عمل ، نیاز داریم تا مطمئن شویم که همیشه یک عضو کمینه وجود دارد.

(یک مجموعه مرتب‌جزئی شاید هیچ عضو کمینه‌ای نداشته‌باشد: ملاحظه کنید $\leq$ بر □.)

لم ۸. ٤ هر ترتیب جزئی بر یک مجموعهٔ متناهی غیر تهی یک عضو کمینه دارد!

برهان. فرض کنید R یک ترتیب‌جزئی روی مجموعهٔ، A، باشد. برای هر عضو، $a \in A$ فرضاً که $g(a)$ مجموعه‌ای از عناصر "کمتر یا برابر با a" است، یعنی اینکه،

$$g(a) ::= R\{a\} \cup \{a\}$$

حالا اگر bRa، آنگاه تعدی بودن R ایجاب می‌کند که $g(b) \subseteq g(a)$. همچنین اگر، bRa و $b \neq a$. آنگاه $a \notin g(b)$ از آنجا که R پاد متقارن است، داریم $g(b) \subset g(a)$. بنابر این اگر a

کمینه نباشد، آنگاه عضوی متنند b به طوری که $g(b)\subset g(a)$ وجود دارد. اگر A متناهی باشد، این دلالت می‌کند که $|g(b)|<|g(a)|$.

بنابر این اگر A متناهی باشد، اصل خوش ترتیبی دلالت می‌کند که باید یک a_0 وجود داشته باشد به طوری که $g(a_0)$ اندازهٔ حداقلی داشته باشد. به این ترتیب هیچ $g(b)$ نمی‌تواند کوچکتر از $g(a_0)$ باشد و معنی‌اش این است که a_0 باید کمینه باشد. □

قضیه ۴.۹. هر ترتیب‌جزئی روی یک مجموعهٔ متناهی یک دسته‌بندی توپولوژیک دارد.

برهان. ما قضیه ۴.۹ را از راه استقراء روی n با فرض زیر ثابت می‌کنیم.

$p(n)$::=[هر ترتیب‌جزئی روی یک مجموعه با n عضو یک طبقه‌بندی توپولوژیک دارد]

حالت پایه $n=1$: یک دسته‌بندی توپولوژیک از یک مجموعه با یک عضو به سادگی همان عضو است.

مرحلهٔ استقرائی: فرض کنید $p(n)$ درست باشد.فرض کنید $\preceq$ یک ترتیب‌جزئی، روی مجموعه A، با $n+1$ عضو باشد. بوسیلهٔ لم ۴.۸، A باید یک عضو کمینه مانند a_0 داشته باشد، حالا تحدید $\preceq$ به مجموعهٔ $A-\{a_0\}$ هم یک ترتیب‌جزئی است. بنابر این توسط فرض استقرا، $A-\{a_0\}$ یک دسته‌بندی توپولوژیک مانند $ô_n$ دارد. اینک تعریف کنید ô روی A با این قانون که $a\,ô\,b$ اگر و فقط اگر [$a=a_0$ یا $a\,ô_n\,b$]. اینک ساده است که بررسی کنیم ô دسته‌بندی توپولوژیک مورد نیاز A است. این ثابت می‌کند $P(n+1)$، برهان با استقراء تکمیل می‌شود. □

روشهای بسیار دیگری هم برای ساختن دسته‌بندی‌های توپولوژیک وجود دارنـد. در واقـع، دامنـهٔ ترتیب‌جزئی نیاری به متناهی بودن ندارد: ما این را ثابت نمی کنیم، ولی کلیهٔ ترتیـب‌هـای‌جزئـی، حتی آنهایی که نامتناهی‌اند، دسته‌بندی‌های توپولوژیک دارند.

٤. کار برنامه نویسی موازی

برای ترتیب‌جزئی وابستگی‌های موجود در کار، دسته‌بنـدی توپولوژیـک روشـی را بـرای اجـرای پشت سرهم و بدون نقض وابستگی‌ها فراهم می‌کند. ولی چه پیش می‌آید اگر توانایی انجام بیشتر از یک کار را در همان زمان داشته باشیم؟ برای مثال، بـه فـرض کـه کارهـا برنامـه‌ریـزی باشـد، ترتیب‌جزئی وابستگی داده را بیان می‌کند، و ما یک ماشین موازی کار با تعداد زیادی عمـل کننـده به جای یک ماشین دنباله‌ای که فقط یک عمل کننده داشـته باشـد، داریـم. چطـور بایـد کارهـا را برنامه‌ریزی کنیم؟ هدف ما باید کاهش دادن زمان کلی اتمام همهٔ کارها باشد. (برای سادگی بیشتر) بیائید فرض کنیم که انجام همهٔ کارها یک اندازه زمان می‌برد و همهٔ عمل کننده‌ها از یک گونه‌اند. بنابر این، در یک مجموعهٔ مرتب‌جزئی متناهی از کارها، با یک برنامهٔ مـوازی، بـرای انجـام همـهٔ کارها چقدر زمان می‌برد؟ همچنین می‌توانیم از مفاهیم ترتیب‌جزئی برای تجزیهٔ این مسئله استفاده کنیم.

در مثال لباسها، می‌توانستیم تمام عناصر کمینه را ابتدا انجام بدهیم (جوراب چپ، جوراب راست، لباس زیر، پیراهن)، آنها را خارج کرده و مجدداً تکرار کنیم. به تعداد زیادی دست نیاز داشـتیم یـا

شاید هم به خدمتکاران پوشاننده. می‌توانیم شلوار و زیرپوش را بعداً بپوشیم، و سپس کفش چپ، کفش راست، و کمربند، و سرانجام ژاکت را به تن کنیم.

بهتر از این کاری نمی‌توانیم بکنیم، زیرا دنبالهٔ زیرپوش، شلوار، کمربند، ژاکت باید به این ترتیب انجام شود. مجموعه‌ای از کارها که باید به این شکل متوالی انجام شود را زنجیر می‌نامند.

تعریف ۱۰. ٤ یک زنجیر در یک ترتیب‌جزئی یک زیر مجموعه از عناصر به شمار می‌رود، به طوریکه هر دو عضو در زیر مجموعه قابل مقایسه باشند. یک تعریف دیگر یک زنجیر در یک ترتیب جزئی، یک مجموعه C، از دامنه است به طوری که تحدید ترتیب جزئی به ، C، یک ترتیب کلی شود.

به خاطر داشته باشید که رئوس بر هر مسیر در DAG از یک ترتیب‌جزئی یک زنجیر است. در کل، بطور واقع، زمان موازی باید حداقل به اندازهٔ هر زنجیر باشد. برای اینکه اگر از زمان کمتری استفاده می‌کردیم، پس می‌بایست دو کار در زنجیر هم زمان انجام می‌گرفت و با این کار لزوم بستگی را نقض می‌کردیم. از بزرگ‌ترین زنجیر همچنین به عنوان مسیر بحرانی نام برده می‌شود. بنابر این حداقل به t مرحله نیازمندیم، جایی که t به اندازهٔ[۱] بزرگترین زنجیر است. خوش‌بختانه، همیشه این امکان هست که فقط از t مرحلهٔ موازی استفاده کرد:

قضیه ۱۱. ٤ فرض کنید R ترتیب‌جزئی محض روی یک مجموعه ، A،باشد. اگر طولانی‌ترین زنجیرهٔ A به اندازهٔ t باشد، بنابر این یک افزاری از A به t قسمت‌ها، $B_۱,B_۲,\ldots B_t$، وجود

[۱] نقطهٔ ضربه زنند: طول یک زنجیرهٔ $ak > \ldots a۱ > a۰$، می‌شود k،مطابق با تعداد فلش‌هایی که از آن می‌گذرد. اندازه زنجیر به تعداد اجزاء آن است، مثلاً $k+۱$

دارد به طوری که برای هر قسمت، B_i، همهٔ کارهایی که باید قبل از کارهای B_i انجـام شـوند در گروه‌های با اندیس کمتر قرار دارند:

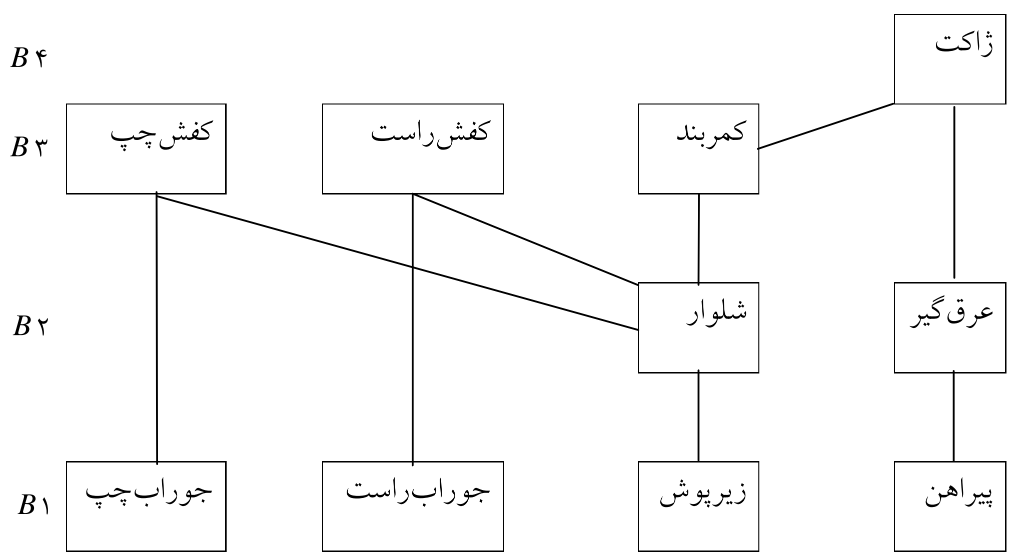
$$RB_1 = \varnothing, \text{ و} \tag{۱۰}$$

$$RB_i \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{i-1}, \tag{۱۱}$$

برای $1 < i \leq t$

نتیجه فرعی ۱۲. ٤ برای R و t به مانند بالا، امکان دارد همهٔ کارها را در t مرحلهٔ برنامـه‌ریـزی کرد.

برهان. کلیهٔ عناصر B_i را در وقت i زمان‌بندی کنید. ایـن کـار الـزام‌هـای وابسـتگی را بـرآورده می‌سازد، زیرا تمام کارهایی که به یک کار بستگی دارند در مواقع پیش از آن زمان‌بندی شده‌اند. □



نتیجه فرعی ۱۳. ٤ زمان موازی = اندازهٔ بزرگترین زنجیر.

بنابر این فقط می‌ماند که قضیه۱۱. ٤ را ثابت نماییم:

برهان. مجموعه‌های B_i را به شکل زیر بسازید:

$Bi ::= \{a \in A \mid$ بزرگترین زنجیر که پایانش در a و به اندازهٔ i است$\}$

این فقط t مجموعه را بدست می‌دهد، چون که بزرگترین زنجیره به اندازهٔ t است. همچنین، هر $a \in A$ دقیقاً به یک B_i تعلق دارد. برای تکمیل برهان به خاطر داشته باشید که اگر $a \in B۱$ باشد، آنگاه a باید کمینه باشد، و از آنجا که R اکید است داریم $RB۱ = \varnothing$ و (۱۰) اثبات می‌شود.

حالا فرض کنید $۱ < i \leq t$، فرض کنید (۱۱) برقرار نباشد. یعنی اینکه، یک $a \in B_i$ وجود دارد و $b \in A$ به طوری که bRa، و $b \notin B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_{i-۱}$. آنگاه با توجه به تعریف B_i زنجیره‌ای از اندازه $> i-۱$ که در b به پایان می‌رسد وجوددارد. همچنین، چون R اکید است، a در زنجیری که پایانش در b است،قرار نمی‌گیرد. بنابر این می‌توانیم a را به پایان زنجیر اضافه کنیم تا زنجیره‌ای به اندازهٔ $> i$ که پایانش در a بدست آوریم، که با این واقعیت که $a \in B_i$ متناقض است.

بنابر این با تعداد نامحدودی از پردازنده‌ها، زمان برای تکمیل کردن همهٔ کارها به اندازهٔ بزرگترین زنجیر است. این میان می‌کند که این قضیه برای کاری بیش از برنامه‌نویسی موازی مناسب است. معمولاً به صورت زیر اظهار می‌شود.

تعریف ٤ .١٤ یک پاد زنجیر در یک ترتیب‌جزئی مجموعه‌ای از عناصر است به طوری که هر دو عضو درون مجموعه غیر قابل مقایسه باشند.

نتیجه فرعی ۱۵. ٤ اگر بزرگترین زنجیر در یک ترتیب جزئی به اندازهٔ t، باشد، آنگاه دامنه می‌تواند به t پاد زنجیر افراز شود.

برهان. فرض کنید که پاد زنجیرها مجموعه‌های B_i باشند که در برهان متعلق به قضیه۱۱. ٤ تعریف شده‌اند.

می‌بایست امتحان کنیم که هر B_i یک پاد زنجیر است ،مثلاً، اگر a,b عناصر مجزای B_i باشند، آنگاه آن‌ها غیر قابل مقایسه‌اند. ولی اگر که دو عضو $a,b \in B_i$ وجود داشته باشند به طوری که b,a قابل قیاس باشند، می‌گوئیم aRb. سپس به مانند برهان قضیه ۱۱. ٤، با اضافه کردن b در انتهای زنجیر به اندازهٔ i که در a پایان می‌یابد، زنجیری به اندازهٔ $i+1$ که در b تمام شود به دست می‌آوریم، که با این فرض که $b \in B$ متناقض است. □

۵. ٤ لم دیلورث

می‌توانیم از نتیجهٔ فرعی ۱۵. ٤ برای اثبات یک نتیجهٔ[1] معروف دربارهٔ مجموعه‌های مرتب شدهٔ بخش‌پذیر استفاده کنیم:

لم ۱٦. ٤ (دیلورث). برای هر t، هر مجموعهٔ جزعاً مرتب با n عضو یا زنجیری بزرگتر از اندازه t دارد باشد یا پادزنجیری به اندازهٔ حداقل n/t دارد.

برهان. فرض کنید هیچ زنجیری از سایز بزرگتر از t وجود نداشته باشد، یعنی که، بزرگترین زنجیر از سایز $\leq t$ است. آنگاه بوسیلهٔ نتیجه فرعی ۱۵. ٤، n عضومی‌توانند با حداکثر t پادزنجیر

۱. لمای ۱٦. ٤ همچنین از یک نتیجهٔ کلی تر به نام قضیه دیلورث تبعیت می‌کند که دربارهٔ آن بحث نخواهیم کرد.

تقسیم شوند. فرض کنید که ℓ اندازهٔ بزرگترین پادزنجیر باشد. از آنجا که هر عضو دقیقاً بـه یـک پادزنجیر متعلق باشد، و حداکثر t پادزنجیر وجود دارد، ممکن نیسـت بیشـتر از lt عضـو وجـود داشته باشم، پس $\ell t \geq n$.بنابر این زنجیری با حداقل $\ell \geq n/t$ عضو وجود دارد. □

نتیجهٔ فرعی ۱۷. ٤ هر مجموعه جزعاً مرتب با n عضو زنجیری از سایز بزرگتر از $\sqrt{n}$ یـا یـک پادزنجیر به اندازهٔ حداقل $\sqrt{n}$ دارد.

برهان. قرار دهید $t=\sqrt{n}$ در لم ۱٦. ٤ . □

مثال ۱۸. ٤ در مجموعهٔ جزعاً مرتب لباس پوشیدن $n=$ ۱۰ قرار دهید $t=$ ۳. زنجیری به اندازهٔ ۴ دارد. قرار دهید $t=$ ۴. هیچ زنجیری به اندازهٔ ۵ ندارد، ولی یک پادزنجیر به اندازهٔ ۴≥۱۰/۴ دارد.

مثال ۱۹. ٤ فرض کنید کلاسی با ۱۰۱ دانشجو داریم. سپس با اسـتفاده از حاصـل‌ضـرب ترتیـب جزئی از مثال ۱۲. ۳، می‌توانیم از لم دیلورت استفاده کرده تا به این نتیجه برسـیم کـه زنجیـری از ۱۱ دانشجو وجود دارد که قد بلندتر و مسن‌ترند، یا پـادزنجیری بدسـت آوریـم کـه ۱۱ دانشـجو قدبلندتر و جوان‌ترند. که یک سرگرمی در کلاس پدید می آورد.

به مثابه یک نتیجهٔ شگفت‌آور از قضیهٔ فرع ۱۷. ٤، داریم:

نتیجهٔ فرعی ۲۰. ٤ در هر دنباله‌ای از اعداد مختلـف n، یـا یـک زیـر دنبالـهٔ صـعودی از طـولی بزرگتر از $\sqrt{n}$ یا یک زیر دنبالهٔ نزولی از طول حداقل $\sqrt{n}$ وجود دارد.

مثال ۲۱. ٤ دنبالهٔ

$$\langle ۶,۴,۷,۹-۱,۲,۵,۳,۸ \rangle$$

دنبالهٔ نزولی $\langle ۶,۴,۱\rangle$، و دنبالهٔ صعودی $\langle ۱,۲,۳,۸\rangle$ را دارد.

برهان. می‌توانیم نتیجهٔ فرعی ۲۰. ٤ را با استفاده از لم دیلورت، ثابت کنیم، ترفند هم این است که صحت مجموعهٔ جزعاً مرتب را تعیین کنید. فرض کنید دنبالهٔ داده شده از این قرار است

$a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n.$

فرض کنید که دامنهٔ ترتیب جزئی مجموعه‌ای از جفت‌های (i,a_i) باشد، برای $۱ \le i \le n$، تعریف کنید

$$(i,a_i) < (j,a_j) \text{ اگر و فقط اگر } i < j \wedge a_i < a_j$$

بنابر این $<$یک ترتیب اکید محض است. چون‌که تحدیدی از مضرب رابطه‌های $<$ روی $\{۱,\ldots,n\}$ و $\{a_۱,\ldots,a_n\}$ است.

حالا یک زنجیر- $<$ فرض کنید، اگر عناصر آن را طوری ترتیب بدهیم که مختصات اولیه آنها در ترتیب صعودی باشند، دومین مختصات‌شان هم باید در ترتیب صعودی باشد. یعنی که اگر داشته باشیم

$$(i_۱,a_{i_۱}) < (i_۲,a_{i_۲}) < \ldots < (i_k,a_{i_k}),$$

آنگاه افزایش هر دوی a_{i_j}, i_j از چپ به راست می‌باشد. معنی‌اش این است که یک زنجیر با یک زیر دنبالهٔ صعودی متناظر است.

ولی یک پادزنجیر متناظر چه کاری ازش بر می‌آید؟ خب، فرض کنید $(j,a_j),(i,a_i), i < j$ غیر قابل قیاس $<$-اند. آنگاه، مطابق با تعریف، باید داشته باشیم $a_i > a_j$. بنابر این در یک پادزنجیر

فرضی، اگر عناصر آن را طوری ترتیب بدهیم که مختصات اولیهٔ آنها در ترتیب صعودی قرار بگیرند، مختصات ثانویه در ترتیب نزولی قرار می‌گیرند. یعنی که، یک پادزنجیر، که عناصرش با مختصات اولیه طبقه‌بندی شده، با یک زیر دنبالهٔ نزولی متناظر است.

حالا نتیجه (فرع) ۲۰. ٤ بلافاصله از لم دیلورت بدست می‌آید. □

تمرین سریع: اندازهٔ طولانی‌ترین زنجیری که تضمین شده در هر مجموعهٔ جزءاً مرتب با n عضو وجود داشته باشد چقدر است؟ دربارهٔ بزرگترین پادزنجیر چطور؟

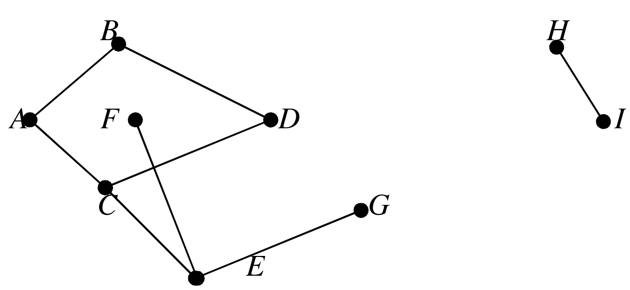
مسئله ۳. دنباله‌ای را شرح بدهید که از اعداد صحیح ۱ تا ۱۰/۰۰۰ تشکیل شده باشد، به ترتیبی که هیچ زیر دنبالهٔ صعودی یا نزولی به اندازهٔ ۱۰۱ در آن نباشد.

تمرین نه خیلی سریع: در هر دنبالهٔ فرضی از اعداد صحیح یک راه کافی برای یافتن طولانی‌ترین زیر دنباله صعودی و طولانی‌ترین زیر دنبالهٔ نزولی پیدا کنید. (یک راه خوب وجود دارد.)

۵. گراف‌های بدون جهت

به طور غیر رسمی، یک گراف بدون جهت، به اختصار یوگراف، دسته‌ای از نقاط است که با خطوط به هم پیوسته‌اند.

اینجا یک مثال از یک گراف ارائه می‌دهیم:



متأسفانه، این تعریف به اندازهٔ کافی برای بحث ریاضی دقیق نیست.

تعریف ۱. ۵ یک یوگراف، G، تشکیل شده از یک مجموعه، V، رئوس G خوانده می‌شود، و یک دسته ، E، متشکل از زیر مجموعه‌های دوعضوی V، عناصر E یالهای G نامیده می‌شوند. رئوس با نقاط در شکل متناظرند، و یالها با خطوط متناظر هستند. به این ترتیب، نقاط — و — خطوط نمودار بالا، یک نمایش تصویری از یوگراف است جایی که:

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$$

$$E = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,D\},\{C,D\},\{C,E\},\{E,F\},\{E,G\},\{H,I\}\},$$

استفاده از نماد $A-B$ برای نشان دادن یال $\{A,B\}$ سودمند خواهد بود. به خاطر داشته باشید که $A-B$ و $B-A$ توصیف‌های متفاوت ازهمان یال هستند، از آن رو که مجموعه‌ها نامرتب هستند.

به دو رأس در یک گراف مجاور می‌گویند اگر با یک یال به هم متصل شوند، و یک یال به رئوسی که متصل می‌شود را واقع می‌گویند.به تعداد یالهای واقع در یک رأس درجهٔ رأس می‌گویند. برای مثال، در گراف بالا، A مجاور B و B مجاور D است، و یال $A-C$ واقع بر رئوس A و C است. رأس H درجهٔ ۱، D درجهٔ ۲ و E درجهٔ ۳ دارد.

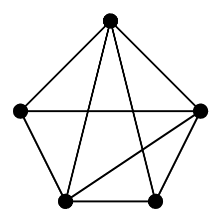
یوگراف‌ها در اصل به مانند روابط متقارن یا گراف‌های جهت‌دار با یک پیکان معکوس برای هر پیکان هستند. آنها به صورت شگفت‌آوری کاربردهای زیادی دارند، برای مثال، در تعیین مسیر حل مسئله، زمان‌بندی تلاقی، و مسائل ساختار مولکولی.

در باقی‌ماندهٔ این فصل به سادگی از یوگرافها به عنوان گراف نگاه خواهیم کرد.

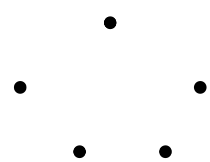
۱. ۵ تعدادی از گراف‌های معمول

تعدادی از گراف‌ها به قدری مکراراً مطرح می‌شوند که اسم دارند. گراف کامل روی n رأس، که همچنین K_n هم خوانده می‌شود، بین هر دو رأس یک یال دارد.

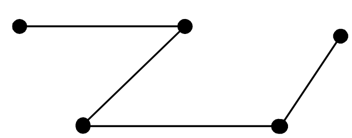
در اینجا K_5 را داریم:



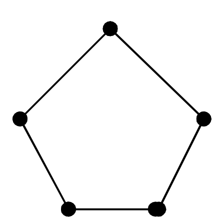
گراف تهی ابداً هیچ یالی ندارد. در اینجا گراف تهی با ۵ رأس است.



گراف ۵ رأس دیگری L_4 است، گراف یالی از طول چهار:

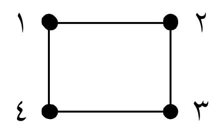


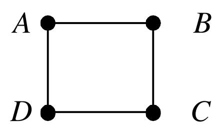
و اینجا C_5 هست، دوره ساده با ۵ رأس



۲. ۵ یکریختی

دو گراف که یکسان به نظر می‌رسند ممکن است عملاً در یک برآورد رسمی متفاوت باشندو برای مثال، دو گراف ذیل هر دو دوره‌های ساده با ۴ رأس هستند:





ولی یک گراف مجموعهٔ رئوس $\{A,B,C,D\}$ دارد، در حالیکه گراف دیگری مجموعـهٔ رئـوس $\{۱,۲,۳,۴\}$ دارد. اگر چنین باشد، پس گراف‌ها موضوعات متفاوت ریاضی‌اند، اکیداً می‌گوئیم. این یک جداسازی بی‌اثر است؛ گراف‌ها مثل هم هستند.

خوشبختانه، ما به صورت شسته – رفته‌ای می‌توانیم ایدهٔ "مثل هم هستند" را بدست آوریـم و در آن‌ها به صورت اساسی از هم ارزی میان گراف‌ها استفاده کنیم. گراف‌های $G۱$ و $G۲$ هم‌ریخـت هستند اگر یک تناظر یک –به –یک میان رئوس $G۱$ و $G۲$ وجود داشته باشد به طوری کـه یـک یال بین دو رأس $G۱$ وجود داشته باشد اگر و فقط اگـر یـک یـال میـان دو رأس متنـاظر در $G۲$ وجود داشته باشد. برای مثال، تناظر پائین را میان رئوس دو گراف بالا در نظر بگیرید:

A متناظر با ۱ — B متناظر است با ۲

D متناظر است با ۴ — C متناظر است با ۳

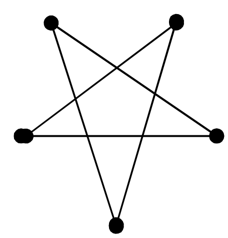
حالا یک یال میان دو رأس گراف سمت چپ وجود دارد اگر و فقط اگر یک یال میان دو رأس متناظر گراف سمت راست وجود داشته باشد. بنابر این، هر دو گراف هم‌ریخت هستند. این تناظر یکریختی نامیده می‌شود.

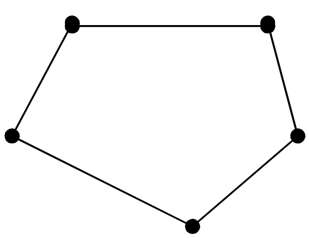
در عبارت‌های رسمی‌تر، اگر G_1 گرافی با رئوس V_1، و یالهای E_1 باشد، و G_2 هم از همین وضع برخوردار باشد، آنگاه G_1 هم‌ریخت G_2 است اگر و فقط اگر یک تابع دوسویی $f: V_1 \to V_2$ به طوری که برای هر زوج رأس $u,v \in V_1$:

$f(u)-f(u)\in E_2$ اگر و فقط اگر $u-v\in E_1$

تابع f که تناظر میان رئوس را معین می‌کند یکریختی نامیده می‌شود.

دو گراف هم ریخت ممکن است که کاملاً متفاوت رسم شوند. برای مثال، در اینجا دو روش متفاوت برای رسم C_5 وجود دارند:





یکریختی همهٔ خصوصیات اتصال یک گراف را برقرار می‌کند، صرفنظر از اینکه رئوس چه نامیده می‌شوند، از چه ساخته شده‌اند، یا اینکه در کجای رسم یک گراف قرار می‌گیرند. بنابر این یک ویژگی مثل "برخوردار از سه رأس از درجهٔ ۴" تحت یکسانی برقرار می‌ماند، در حالی که "برخورداری از رأسی که یک عدد صحیح است" برقرار نمی‌ماند بخصوص، اگر یک گراف سه

رأس از درجهٔ ٤ داشته باشد و دیگری نداشته باشد، نمی‌توانند یک‌ریخت باشند. به همان سان، اگر یک گراف یالی داشته باشد که واقع بر رأس درجهٔ٨ و یک رأس درجهٔ٣، آنگاه هر گراف هم‌ریخت باید چنین یالی داشته باشد.

در جستجوی ویژگی‌هایی از این دست تصمیم‌گیری بر اینکه دو گراف هم‌ریخت نیستند را می‌تواند آسان کند، یا اینکه در عمل یک یکریختی میان آنها پیدا کرد. در عمل، این مورد مکرراً مسئله تصمیم‌گیری که آیا دو گراف هم‌ریخت باشند را براستی آسان می‌سازد. با این همه، هیچ کس تاکنون راه حلی کلی برای تعیین اینکه آیا دو گراف هم‌ریخت باشند را نیافته است که تضمینی باشد برای حرکت سریع‌تر در میان یک جستجوی از خلال تمام نگاشت‌های دوطرفهٔ ممکن میان مجموعه‌های رأس‌هایشان.

یافتن یک اسلوب یکریختی کارآمد، برای مثال، جستجو کردن برای یک مولکول خاص در یک پایگاه اطلاعات فرضی در زنجیره‌های مولکولی را آسان خواهد کرد. از طرف دیگر، دانستن اینکه هیچ اسلوب کارآمدی وجود ندارد خود ارزشمند است نبوده است بود: این مورد کار امنیت قرارداد تشخیص هویت شخصی قابل استفادهٔ مجدد که در تجارت اینترنتی معرکه خواهد بود را موجه می‌سازد. در این باره در ارائه سخنرانی روز جمعه بیشتر توضیح خواهیم داد.