کد درس: ۱۸/۰۶۲J و ۶/۰۴۲J مقطع آموزشی: کارشناسی	بسمه تعالی عنوان درس: **ریاضیات** **برای علوم کامپیوتر**	دوره‌های آزاد رایانه‌ای SBU-MIT OCW Joint Project
استاد مدرس MIT: پروفسور آلبرت مِیر و پروفسور رونیت روبینفلد استاد مترجم SBU: دکتر چنگیز اصلاح‌چی		معاونت فناوری اطلاعات وارتباطات پروژه مشترک دانشگاه شهید بهشتی و دانشگاه MIT

فصل دوم

تخمین‌ها & مجموعه‌ها

۱. تکنیک‌های بیشتر استدلال

۱. ۱ استدلال به وسیله تناقض

در یک استدلال با تناقض یا استدلال غیرمستقیم، نشان می‌دهید که اگر گزاره‌ای غلط باشد، آنگاه تناقض‌های منطقی ایجاد می‌شود.

بنابر این، گزاره باید دست باشد و استدلال توسط تناقض، بوسیلۀ نتایج قانونی توصیف می‌شود.

$$\frac{\neg P \rightarrow F}{P}$$ قاعده

استدلال با تناقض نظریه‌ای همیشه ماندگار است. با این وجود همانطور که از نامش برمی‌آید استدلال‌های غیرمستقیم می‌توانند کمی پیچیده باشند. بنابر این استدلال‌های مستقیم به طور کلی به عنوان یک موضوع آشکار قابل ترجیحند.

۲. ۱ روش

به منظور اثبات یک گزاره P با تناقض:

۱- بنویسید " از تناقض استفاده می‌کنیم".

۲- بنویسید " فرض می‌کنیم که P غلط باشد".

۳- نتیجه بگیرید یک تناقض منطقی را.

۴- بنویسید "این یک تناقض است. بنابر این، P باید صحیح باشد".

مثال

به یاد داشته باشید که یک عدد گویا است اگر برابر با یک کسر از اعداد صحیح باشد. برای مثال، ۳.۵ = ۷/۲ و $\frac{۱}{۹}$ =۰.۱۱۱۱۰۰ اعداد گویا هستند. از سوی دیگر، با تناقض ثابت خواهیم کرد که $\sqrt{۲}$ اصم و گنگ است.

قضیه ۱. ۱ . $\sqrt{۲}$ گنگ است.

برهان. استدلال با تناقض را به کار می‌بریم. فرض کنید که ادعا نادرست باشد، یعنی که $\sqrt{۲}$ گویا است. پس می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به صورت کسر a/b به ساده‌ترین صورت بنویسیم.

مجذر هر دو طرف بدست می‌دهد که $۲=a^{۲}/b^{۲}$ و به این ترتیب $۲b^{۲}=a^{۲}$. این دلالت می‌کند که a زوج است، پس a حاصلضرب ۲ است. بنابر این $a^{۲}$ باید حاصلضرب ۴ باشد. به دلیل تساوی $a^{۲}=۲b^{۲}$ می‌فهمیم که $۲b^{۲}$ هم باید حاصلضرب ٤ باشد. این ثابت می‌کند که $b^{۲}$ عدد زوج است و براین اساس b هم باید زوج باشد ولی از آنجا که b,a هر دو صحیح هستند کسر a/b به دو ساده می‌شود و از این‌رو در ساده‌ترین صورت خود نمی‌باشد. این یک تناقض است بنابر این $\sqrt{2}$ باید گنگ باشد.

۳. ۱ دام بالقوه

ممکن است اغلب دانشجویان از یک استدلال غیر مستقیم استفاده می‌کنند چنین استدلالهایی اشتباه نیستند؛ آنها فقط عالی نیستند. بیائید به یک مثال نگـاه کنـیم. تـابع f اکیـداً صـعودی اسـت اگـر $f(x) > f(y)$ برای هر x و y حقیقی به طوری که $x > y$.

قضیه ۱۰۲. اگر g, f توابع اکیداً صعودی باشند آنگاه $f+g$ تابع اکیداً صعودی است.

بیائید در ابتدا به یک استدلال مستقیم ساده نگاه کنیم.

برهان. فرض کنید y, x اعداد حقیقی دلخواهی باشند به طوری که $x > y$. آنگاه:

(از آنجائیکه f اکیداً صعودی است) $\quad f(x) > f(y)$

(از آنجائیکه g اکیداً صعودی است) $\quad g(x) > g(y)$

جمع این نامساوی‌ها می‌شود: $\quad f(x)+g(x) > f(y)+g(y)$

بنابراین، $f+g$ اکیداً صعودی‌می‌باشد.

از طرف دیگر می‌توانستیم قضیه را با تناقض ثابت کنیم ولی این مسئله بحث را بدون نیاز پیچیـده می‌کند.

برهان. استدلال را توسط برهان خلف به کار می‌بریم. فرض کنید که $f+g$ اکیداً صعودی نباشد. بنابر این باید اعداد حقیقی y, x به طوری که $x > y$ وجود دارد که

$$f(x)+g(x) \le f(y)+g(y)$$

این عدم تساوی در صورتی می‌تواند برقرار باشد که $f(x) \le f(y)$ یا $g(x) \le g(y)$

در هر صورت، با تناقض روبرو هستیم چون که هر دوی f و g اکیداً صعودی هستند. بر این اساس $f+g$ باید عملاً اکیداً صعودی باشد.

٤. ١ استدلال با حالت‌گیری

در یادداشتهای هفتهٔ اول توسط جدول ارزش یاب معین کردیم که دو گزارهٔ $A\vee(\overline{A}\wedge B)$ و $A\vee B$ برابر بودند. راهی دیگر برای اثبات این بوسیلهٔ حالات خواهد بود:

A صحیح است. بنابر این $\vee A$ هرچیز دیگر ارزش T خواهد داشت. از آنجائی که هر دو عبارت به این شکل هستند، در این حالت هر دو همان ارزش درست را یعنی T خواهند داشت.

A نادرست است. بنابر این $A\vee P$ همان مقدار ارزش P را، برای هر گزارهٔ دیگر، P خواهد داشت. بنابر این عبارت دوم همان مقدار ارزش را مثل B دارا می‌باشد. عبارت اول همان مقدار ارزش $\overline{F}\wedge B$ را دارد که همچنین همان مقدار ارزش B است. بنابر این در این حالت هر دو عبارت همان مقدار ارزش را، یعنی B دارا خواهند بود.

در اینجا مثال جالب توجه کوچکی است. بیائید قبول کنیم که هر دو نفر آدم تا حالا یا با هم روبرو شده باشند یا نه. چنانچه هر جفت از آدمها در یک دسته با هم دیدار کرده باشند به این گروه می‌گوئیم باشگاه. چنانچه هر جفت از آدمهای یک گروه با هم دیدار نکرده باشند، آنرا یک گروه غریبه می‌نامیم.

قضیه. هر مجموعهٔ ٦ نفری یا شامل یک باشگاه ٣ نفره و یا یک گروه غریبه ٣نفره است.

برهان. استدلال توسط تجزیهٔ حالت [۱] انجام می‌گیرد. فرضاً که x یکی از آن ٦ نفر باشد. دو حالت پیش می‌آید:

۱- در میان ۵ نفر باقیمانده دست کم ۳ نفر x را دیده‌اند.

۲- در میان ۵ نفر باقیمانده حداقل ۳ نفر x را ندیده‌اند.

در ابتدا بحث می‌کنیم که حداقل یکی از دو حالت باید برقرار[۲] باشد. این را بوسیله تناقض ثابت خواهیم کرد. به این معنی فرض کنید که هیچکدام از حالتها اتفاق نیفتد. معنی‌اش آن است که حداکثر ۲ نفر در آن گروه x را دیده و حداکثر ۲ نفر x را ندیده‌اند. این دست کم ۱ نفر از ۵ نفر باقیمانده که به حساب نیامده است را بجا می‌گذارد. یعنی که حداقل ۱ نفر وجود دارد که نه قبلاً x را دیده است و نه x را ندیده است، که با قرار ما تناقض دارد که هر جفت دیده یا ندیده‌اند. بنابر این حداقل یکی از این دو حالت باید برقرار باشد.

حالت ۱: فرض می‌کنیم که حداقل ۳ نفر با x دیدار کرده باشند. این حالت به دو زیر حالت تقسیم می‌شود:

زیر حالت ۱. ۱: هیچ دو نفری از میان آن افراد یکدیگر را ملاقات نکرده‌اند. پس این افراد حداقل یک گروه ۳ نفری بیگانه هستند بنابر این قضیه در این زیر مجموعه برقرار است. این مسئله ثابت می‌کند که فرضیه در حالت اول اتفاق می‌افتد.

۱. تشریح راه حل در آغاز کار به خواننده کمک می‌کند راهش را پیدا کنید.

۲. بخشی از استدلال تجزیهٔ حالت یشان می‌دهد که همهٔ حالتها زا پوشانده‌اید اینها اغلب ناچیزند، زیرا دو حالت به شکل " p " و "غیر p " هستند. به هر حال وضعیت فوق خیلی هم ساده نیست.

زیر حالت ۲. ۱: تعدادی از زوج‌ها با یکدیگر ملاقات کرده باشند، پس آن جفت، با x، یک باشگاه ۳ نفره است بنابر این قضیه در این زیر حالت برقرار است.

حالت۲: فرض کنید که حداقل ۳ نفر هستند که x را ندیده‌اند.

این حالت هم به دو زیر مجموعه تقسیم می‌شود.

حالت ۱. ۲: هر دو نفر از میان گروه همدیگر را دیده‌اند پس این افراد یک گروه حداقل ۳ نفری هستند بنابر این قضیه در این زیر مجموعه برقرار است.

حالت ۲. ۲:تعدادی از زوجها در میان آن افراد همدیگر را ملاقات نکرده‌اند پس آن جفت به همراه x حداقل یک گروه ۳ تایی غریبه را تشکیل می‌دهند. بنابر این قضیه در این زیر مجموعه برقرار است.

بدین ترتیب ثابت می شود که قضیه در هر ۲ حالت هم برقرار است و بر این اساس در تمامی حالات برقرار است.

۲. محمول‌ها (گزاره)

محمول (استناد) گزاره ایست که صحت و اعتبار آن به ارزش یک یا چند متغیر بستگی داشته باشد. برای مثال، « n، مربع کامل است.»

گزاره ایست که صحت و اعتبار آن به معیار n بستگی دارد. گزاره درست است برای $n=۴$ از آنجائیکه ۴ یک مربع کامل است، ولی غلط است برای $n=۵$ از آنجایی که 5 یک مربع کامل نیست. مانند دیگر گزاره‌ها، محمول‌ها اغلب با یک حرف نامگذاری می‌شوند. علاوه بر آن یک

تابع- نماد به کار می‌رود تا یک محمول را با متغیرهای خاصش مشخص کند. برای مثال، ممکن است نام نخستین گزاره مان را p بگذاریم:

$p(n) =$ " n یک مربع کامل است"

و اکنون $p(۴)$ صحیح است و $p(۵)$ غلط است.

این نمادگذاری برای محمول‌ها به طور گیج‌کننده شبیه نمادگذاری تابع معمولی است. اگر p محمول باشد، آنگاه $p(n)$ یا غلط است یا درست، بستگی دارد به مقدار n. از سوی دیگر، اگر p یک تابع معمولی باشد مانند $n^۲+۱$، باشد آنگاه $p(n)$ یک کمیت عددی است. دانشجویان بارها این دو را با هم قاطی می‌کنند.

۱. ۲ ارزش‌گذاری یک محمول

چند نوع بیان قطعی وجود دارد که یک نفر بتواند دربارهٔ محمول در نظر بگیرد: و آن این است که بعضی وقتها صحیح است و اینکه همیشه صحیح است. برای مثال، محمول "$x^۲ \geq ۰$" وقتی که x یک عدد حقیقی باشد همیشه صحیح است. از سوی دیگر، محمول "$۵x^۲ - ۷ = ۰$" تنها گاهی اوقات صحیح است، مخصوصاً وقتی که $x = \pm\sqrt{۷/۵}$

برای بیان مفهوم "همیشه صحیح" و "گاهی اوقات صحیح" در زبان انگلیسی چندین روش وجود دارد. جدول پائین تعدادی قالب کلی که سمت چپ ارائه شده و مثالهای خاص کاربرد آن قالبها را در سمت راست ارائه می‌دهد. می‌توانید از اینگونه عبارتها صدها بار در نگارش ریاضیات مشاهده کنید!

همیشه صحیح

به ازاء هر n، $p(n)$ صحیح است. به ازاء هر x، $x^{۲} \geq ۰$

$p(n)$ در ازاء هر n صحیح است. $x^{۲} \geq ۰$ به ازاء هر x

بعضی وقتها صحیح

وجود دارد nای بطوریکه $p(n)$ صحیح است. وجود دارد xای به طوریکه $۵x^{۲} - ۷ = ۰$

به ازاء تعدادی n، $p(n)$ صحیح است . $۵x^{۲} - ۷ = ۰$ به ازاء تعدادی x

به ازاء حداقل یک n، $p(n)$ صحیح است. $۵x^{۲} - ۷ = ۰$ به ازاءحداقل یک x

همهٔ این جملات تعیین می‌کنند که چطور همیشه محمول صحیح است. به طور ویژه، تأیید یک ادعا مبنی بر همیشه صحیح بودن یک محمول را سور عمومی می‌نامند و اثبات این ادعا که یک محمول گاهی وقتها صحیح است را سور وجودی می‌نامند. بعضی وقتها جملات انگلیسی دربارهٔ معنی سور غیرواضح هستند:

«چنانچه بتوانید هر مسئله را که ما مطرح می‌کنیم حل کنید، آنگاه نمرهٔ شما در این درس A است.» عبارت "بتوانید هر مسئله‌ای را که ما مطرح کنیم حل کنید" می‌تواند به هر دو شکل سور عمومی و یا وجودی ترجمه شود:

«می‌توانید هر مسئله‌ای را که ما مطرح کنیم حل کنید.»

یا ممکن است،

«حداقل می‌توانید یک مسئله را که، مطرح می‌کنیم حل کنید.»

در هر حالت به خاطر بسپارید که این عبارت معین شده درون یک گزارهٔ اگر- آنگاه بزرگتر خـود را نشان می‌دهد. این کاملاً عادی است؛ عبارات سوردار خودشان گزاره هستند و می‌توانند با و، یا، دلالت می‌کند و غیره ترکیب شوند. درست مثل هر گزارهٔ دیگر.

۲. ۲ نماد بیشتر

علائمی برای نشان دادن سور عمومی و وجودی، وجود دارند، همانطور که علائمـی بـرای "و" ، ($\wedge$) و "دلالت می‌کند بر" ($\rightarrow$) و الی آخر وجود دارد. علی‌الخصوص، بـرای گفـتن اینکـه یـک گزاره $p(n)$ در ازاء تمام مقادیر x از یک مجموعه D صحیح است.

می‌نویسد:

$$\forall x \in D . p(n)$$

علامت $\forall$ "به ازاء همه" خوانده می‌شود، بنابر این تمام گزاره بـه صـورت "بـه ازاء همـهٔ x در D، $p(x)$ صحیح است" خوانده می‌شود. برای گفتن اینکه یک گزاره $p(x)$ در ازاء حداقل یک مقدار از x در D صحیح است، می‌نویسد:

$$\exists x \in D . p(x)$$

E برعکس "وجود دارد" خوانده می‌شود، بنابر این چنین عبارتی را می‌توان به شکل "یک x در مجموعه D " وجود دارد بطوری که $p(x)$ صحیح است، خواند. علامت‌هـای $\exists, \forall$ همیشـه بـا یک متغیر و سپس یک محمول به مانند دو مثال بالا دنبال می‌شوند.

به عنوان یک مثال، در نظر بگیرید که مسـائل، مجموعـه مسـائلی باشـد کـه مـا طـرح مـی‌کنـیم، **حل‌های (x)** هم محمول "می‌توانیدمسئله (x) را حل کنید" باشد و حرف A گزارهٔ "می‌توانیـد

نمرهٔ الف این درس را بگیرید "باشد. آنگاه دو تفسیر متفاوت، اگر بتوانید هر مسئله‌ای را که ما مطرح کنیم حل کنید، آنگاه نمرهٔ الف درس را می‌گیرید را به شکلهای زیر می‌توان نوشت:

$(\forall x \in$ حل‌ها . مسائل $(x)) \to A$

یا شاید هم $(\exists x \in$ حل‌ها . مسائل $(x)) \to A$

۳. ۲ ادغام سورها

بسیاری از گزاره‌های ریاضی شامل چندین سور می‌شوند. برای مثال حدس گلدباخ بیان می‌کند:

"هرعدد زوج صحیح بزرگتر از 2 را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت."

بیائید این موضوع را مفصل‌تر بنویسیم تا سورها را روشن‌تر به کار ببریم:

در ازاء هر عدد زوج صحیح که n باشد و بزرگتر از ۲، اعداد اولی مثل q, p وجود دارد بطوری که $n = p + q$.

فرض کنید E_v مجموعه اعداد زوج صحیح بزرگتر از ۲ باشد و فرض کنید $\mathscr{P}$ مجموعهٔ اعداد اول باشد. پس می‌توانیم درس گلدباخ را به مفهوم منطقی آن به شکل زیر بنویسیم:

$$\underbrace{\forall n \in EV}_{n \geq 2 \text{ به ازاء هر عدد صحیح زوج }} \qquad \cdot\underbrace{\exists \quad \mathscr{P} \in \quad \exists \quad q \in \mathscr{P}}_{\text{اعداد اول } q, p \text{ وجود دارند به طوری که}} \quad n = p + q$$

٤. ۲ ترتیب سورها

تعویض ترتیب انواع سورها (عمومی یا وجودی) معنی یک گزاره را تغییر می‌دهد. بیائید برگردیم به مثال خودمان، عبارت گیج‌کنندهٔ: "هر آمریکایی رویایی دارد." این جمله مبهم است زیرا ترتیب سورها مشخص نیست. فرض کنیم A مجموعه‌آمریکاییها باشد، فرض می‌کنیم D مجموعه‌ای از

رویاها باشد. تعریف می‌کنیم $H(a,b)$ به معنی "آمریکائی a رویای d را دارد" حالا معنی جمله می‌تواند این باشد که یک رؤیا هست که هر آمریکائی در آن سهیم است:

$$\exists d \in D \forall a \in A.\ \ H(a,d)$$

یا می‌تواند این معنی را داشته باشد که هر آمریکایی رویایی مخصوص به خود را دارد،

$$\forall a \in A\ \ \exists d \in D;\ \ H(a,d)$$

جابجایی سورها در حدس گلدباخ گزاره‌ای آشکارا غلط بوجود می‌آورد که هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مجموع دو عدد اول یکسان است:

$$\underbrace{\forall n \in EV}_{\text{به ازاء هر عدد صحیح زوج } n \geq 2 \text{ صحیح}} \qquad \underbrace{\exists\ \ p \in \mathscr{P}\ \ \exists\ \ q \in \mathscr{P}}_{\text{اعداد اولی نظیر } q,p \text{ وجود دارند به طوری که}} \qquad n = p + q$$

۱. ٤. ۲ متغیرها روی یک دامنه

وقتی تمام متغیرها در یک فرمول مقدارشان را از یک مجموعه ناتهی و یکسان D می‌گیرند، مناسب است که D را حذف کنیم. برای مثال در عوض $\forall x \in D \exists y \in D.\ Q(x,y)$ ترجیحاً می‌نویسیم

$$\forall x \exists y .Q(x.y)$$

مجموعهٔ غیر تهی بی‌نام که x و y از آن گرفته شده است دامنه‌ی فرمول نامیده می‌شود.

منظم کردن همهٔ متغیرها برای اینکه از یک دامنه گرفته شوند آسان است. برای مثال، حدس گلدباخ می‌تواند با همهٔ متغیرهایی که در دامنه $\mathbb{N}$ هستند به صورت زیر بیان شود

$$\forall n.n \in EV \ \rightarrow (\exists p \exists q.p \in \text{اعداد اول} \ \wedge q \in \text{اعداد اول} \ \wedge n = p + q)$$

۵. ۲ نقیض سورها

یک رابطهٔ ساده میان دو نوع سور وجود دارد. دو جمله زیر یک معنی را می‌دهد:

موضوع این نیست که هر کس دوست دارد برف سواری کند. بعضی‌ها هستند که دوست ندارند برف سواری کنند.

در اصطلاح‌های نمادگذاری منطقی، این حاصل خاصیت کلی فرمول‌های محمول است:

$\neg\forall x .p(x)$ برابر است با $\exists x .\neg p(x)$

به طور مشابه، این جملات معنی یکسان می‌دهند: آنجا کسی نیست که از اسکی کردن روی خمیر مواد آلی خوشش بیاید. هر کسی از اسکی کردن روی خمیر مواد معدنی بی‌زار است.

در نمادگذاری منطقی می‌توانیم هم ارز بودن را اینگونه نشان دهیم:

$(\neg\exists x .Q(x) \leftrightarrow \forall x .\neg Q(x)$

قاعدهٔ کلی این است که جابجایی یک "نقیض" در خلال یک سور نوع آن سور را عوض می‌کند.

٦. ۲ اعتبار داشتن

یک فورمول گزاره‌ای هنگامی معتبر خوانده می‌شود که با T سنجیده شود هیچ هم مهم نیست که چه مغادیری را با متغیرهای گزاره‌ای تعیین کنید. بـرای مثـال قائـده دُمورگـان چنـین اسـت کـه $p \wedge (QYR)$ برابر است با $(p \wedge Q) \vee (p \wedge R)$ به همین گونه است که می‌توان گفت:

$$[p \wedge (Q \vee R)] \leftrightarrow [(p \wedge Q) \vee (p \wedge R)]$$

معتبر است.

همان نظریه به فورمهای محمول هم گسترش می‌یابد ولی برای معتبر بودن یک فورمول اکنون باید با صحیح بودن سنجیده شود مهم نیست چه مقادیری را بسنجد که متغیرهایش روی دامنه‌اش می‌گیرد. برای مثال ما پیش از این مشاهده کردیم که قاعدهٔ نقیض کردن یک سور با قضیهٔ معتبر تسخیر می‌شود.

مثال مفید دیگری از قضیهٔ معتبر چنین است.

$$\exists x\, \forall y\, .p(x, y) \rightarrow \forall y\, \exists x\, .p(x, y).$$

برهان. فرض کنید که D دامنه‌ای برای متغیرهاست و p هم محمول دوتایی بر D باشد. نیاز داریم که اگر $\exists x\, \forall y\, .p(x, y)$ برقرار باشد، آنگاه $\forall y\, \exists x\, .p(x, y)$ نیز برقرار شود.

بنابر این فرض کنید $\exists x\, \forall y\, .p(x, y)$: بنابر این برخی از عناصر $x_{\circ} \in D$ این ویژگی را دارند که $p_{\circ}(x_{\circ}, y)$ در ازاء همهٔ $y \in D$ صحیح است. بنابر این در ازاء هر $y \in D$، تعدادی $x \in D$ وجود دارد مثلاً $x_{\circ}$ که $p_{\circ}(x, y)$ صحیح است. یعنی اینکه $\forall y\, \exists x\, .p(x, y)$ همانطور که باید برقرار است.

از سویی دیگر،

$$\forall y\, \exists x\, .p(x, y) \rightarrow \exists x\, \forall y\, .p(x, y).$$

معتبر نیست. به سادگی می‌توانیم با توصیف یک تفسیر این را ثابت کنیم جایی که فرضیه $\forall y\, \exists x\, .p(x, y)$ صحیح باشد ولی نتیجه $\exists x\, \forall y\, .p(x, y)$ صحیح نباشد. برای مثال فرض کنید که دامنه یک عدد صحیح باشد و $p(x, y)$ معنی $x > y$ را می‌دهد. بر این اساس فرضیه صحیح خواهد بود زیرا به فرض ارزش y می‌توانیم x را $y+۱$ انتخاب کنیم، ولی در سایه این تفسیر

نتیجه به طور قطع تعیین می‌کند که یک عدد صحیح بزرگتر از همهٔ اعداد صحیح وجـود دارد کـه مطمئناً غلط است. تفسیری شبیه این که اثبات ادعاء را رد می‌کند مثال نقض نامیده می‌شود.

۳. انواع داده‌های ریاضی

فرض کردیم که مفاهیم با مجموعه‌ها، دنباله‌ها و توابع و از پیش آشنا بوده‌اید، ومکرراً آنهـا را یـاد کردیم. اینک نگاه سریعی دوباره به تعاریف خواهیم انداخت.

بدون تشریفات، مجموعه، دسته‌ای از اشیاء است، که اعضای مجموعه نامیـده مـی‌شـوند. اعضـای یک مجموعه می‌توانند دربارهٔ هر چیزی باشند: اعداد، نقاطی در فضا یا حتی مجموعه‌هـای دیگـر. روش قراردادی نگارش یک مجموعه فهرست کردن عناصر درون کروشه است. بـرای مثـال چنـد مجموعه اینجاست:

اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{۰,۱,۲,۳,\ldots\}$

رنگهای اصلی C = { زرد , آبی , قرمز }

حیوانات دست آموز مرحوم $D = \{Alex, Tippy, Shells, Shadow\}$

مجموعه‌ای از مجموعه‌ها $P = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

ترتیب عناصر مهم نیستند، بنابر این $\{x,y\}$ و $\{y,x\}$ مجموعه یکسـان هسـتند کـه بـه اشـکال مختلف نوشته شده‌اند علاوه بر آن یک شئ عضوی از یک مجموعه هست یا نیست. با عقل جـور در نمی‌آید که به عضوی فکر کنیم که بیش از یکبار در یک مجموعه دیده شود. بنابر ایـن نوشـتن $\{x,x\}$ خاطر نشان کردن همان شئ دوبار است، مثل اینکه آن فقط x در مجموعه اسـت. بطـور خاص $\{x,x\}=\{x\}$

عبارت $e \in s$ بیان می‌کند که e یک عضو مجموعهٔ s می‌باشد. بـرای مثـال $۷\in \mathbb{N}$ و $\in c$ آبـی، ولی $Tailspin \notin D$ مجموعه‌ها ساده و همه جا هستند. جداقل یکی از مجموعه‌های مورد نظـر را در هر صفحه‌ای از این یادداشتها پیدا خواهید کرد.

۱. ۳ تعدادی مجموعه‌های عمومی

ریاضی دانان علائم ویژه‌ای را برای ارائه مجموعه‌های عام اختراع کرده‌اند.

اعضا	مجموعه	علامت
ندارد	مجموعهٔ تهی	$\varnothing$
$\{۰,۱,۲,۳,...\}$	اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
$\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$	اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
$\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۳},۱۶,$ و غیره	اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
$\pi,e,-۹,$ و غیره	اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
$i,\frac{۱۹}{۲},\sqrt{۲}-۲i$ و غیره	اعداد مختلط	$\mathbb{C}$

یک اندیس بالایی + یک مجموعه را به عناصر مثبت آن محدود می‌سازد، برای مثال $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت را مشخص می‌کند بـه همـین قیـاس، $\mathbb{R}^-$ مجموعـهٔ اعـداد حقیقـی منفـی را مشخص می‌کند.

۲. ۳ مقایسه و ترکیب مجموعه‌ها

گزارهٔ $S \subseteq T$ خاطر نشان می‌سازد که مجموعهٔ S یک زیر مجموعه از مجموعهٔ T است که به این معنی است که هر عضوی از S همچنین عضوی از T است. برای مثال ، $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است) و $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (هر عدد گویا یک عدد حقیقی است)، ولی $\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{Z}$ (هر عدد مختلطی یک عدد صحیح نیست).

به عنوان نیرنگ حافظه به خاطر داشته باشید $\subseteq$ به مجموعهٔ کوچکتر اشاره دارد، درست شبیه نشانهٔ $\le$ که به عدد کوچکتر اشاره می‌کند. .واقعاً این اتصال کمی دورتر هم می‌رود: علامتی به شکل $\subset$ نظیر $<$ وجود دارد. بر این اساس، $S \subset T$ به این معنی است که S زیر مجموعهٔ T است، ولی با هم مساوی نیستند. بنابر این به ازاء هر مجموعه $A \subseteq A, A$, ولی $A \not\subset A$.

برای ترکیب مجموعه‌ها چندین راه وجود دارد. بیائید یک جفت برای استفاده در مثال تعیین کنیم:

$X = \{۱,۲,۳\}$

$Y = \{۲,۳,۴\}$

- اجتماع مجموعه‌های Y, X $(X \cup Y)$ شامل تمامی عناصر موجود در X یا Y یا هر دو می‌باشد بنابر این $X \cup Y = \{۱,۲,۳,۴\}$
- اشتراک مجوعه‌های Y, X مذکور به (با علامت $X \cap Y$) شامل تمامی عناصر موجود در Y, X می‌باشد. بنابر این $X \cap Y = \{۲,۳\}$.
- اختلاف Y, X (با علامت $X - Y$) شامل همهٔ اعضایی است که در X وجود دارد ولی در Y نه. بر این اساس، $X - Y = \{۱\}$, $Y - X = \{۴\}$

۱. ۲. ۳ مکمل مجموعه A

گاهی اوقات بر روی دامنهٔ خاصی تمرکز می‌کنیم مانند: D. برای هر زیـر مجموعـه‌ی A از D، $\overline{A}$ مجموعه تمام اعضا D که در A نسبت تعریف می‌شود، $\overline{A} ::= D - A$ ، مجموعهٔ $\overline{A}$ مکمل A نامیده می‌شود.

برای مثال، وقتی با دامنه‌ای از اعداد حقیقی کار می‌کنیم، مکمل اعداد حقیقی مثبت مجموعه اعداد حقیقی منفی به همراه صفر است. نتیجه اینکه $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

۲. ۲. ۳ مجموعهٔ توانی

مجموعه تمام زیر مجموعه‌های یک مجموعه A، مجموعهٔ توانی، $P(A)$ از A نامیده مـی‌شـود، بنـابر ایـن $B \in P(A)$ اگـر و فقـط اگـر $B \subseteq A$ بـرای مثـال، عناصـر $P(\{۱,۲\})$ عبارتنـد از $\varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۱,۲\}$.

خیلی کلی‌تر، چنانچه A، n عنصر داشته باشد، آنگاه ۲^n مجموعه در $P(A)$ وجود دارد. به این دلیل برخی از مؤلفین نماد ۲^A را به جای $P(A)$ به کار می‌برند.

۳. ۳ دنباله‌ها:

مجموعه‌ها یک راه برای دسته‌بندی یک گروه اشیاء به دست می‌دهند. راهی دیگر یـک دنبالـه است که فهرستی از اشیاء به نامهای مؤلفه‌ها یا اجزاء می‌باشد. دنباله‌های کوتاه به طور کلی بـا فهرست‌بندی عناصر میان پرانتزها تشریح می‌شوند، برای مثال (a,b,c) دنباله‌ای با سه مؤلفـه است.

در حالی که هر دوی مجموعه‌ها و دنباله نقشی همگرا دارند، چندین تفاوت هم وجود دارد.

- عناصر یک مجموعه باید مجزا باشند ولی عبارتهای یک دنباله می‌توانند یکسان باشند. بنابر این (a,b,c) یک دنباله معتبر است، ولی $\{a,b,a\}$ یک مجموعهٔ معتبر نیست.
- عبارتهای موجود در یک دنباله نظم خاصی دارند ولی عناصر یک مجموعه نه. برای مثال (a,b,c) و (a,c,b) دنباله‌های مختلفی هستند ولی $\{a,b,c\}$ و $\{a,c,b\}$ مجموعه‌های یکسان هستند.
- مجموعهٔ تهی معمولاً با این علامت $\varnothing$ نشان داده می‌شود و دنباله تهی معمولاً با λ نشان داده می‌شود.

عملیات ضرب یک راه تماس بین مجموعه‌ها و دنباله‌ها است. حاصل‌ضرب مجموعه‌های، $S_۱,\times S_۲\times\ldots S_n$، مجموعه‌ای تازه است که شامل تمام دنباله‌هایی است که اولین مولفه از $S_۱$ دومین مؤلفه از $S_۲$ و الی آخر است. برای مثال، $\mathbb{N}\times\{a,b\}$ مجموعه‌ای است از کلیه جفت‌هایی که عضو اولشان عدد طبیعی و عضو دوم آنها a یا b است:

$$N\times\{a,b\}=\{(۰,a),(۰,b),(۱,a),(۱,b),(۲,a),(۲,b),\ldots\}$$

حاصل‌ضرب n کپی متعلق به یک مجموعهٔ S به صورت S^n مشخص می‌شود. برای مثال $\{۰,۱\}^۳$ مجموعه‌ای است از تمام زیر دنباله‌های سه‌تایی:

$$\{۰,۱\}^۳=\{(۰,۰,۰),(۰,۰,۱),(۰,۱,۱),(۱,۰,۰),(۱,۰,۱),(۱,۱,۰),(۱,۱,۱)\}$$

٤. ۳ (نمادهای سازنده مجموعه)

یکی از کاربردهای ویژه و البته مهم محمول‌ها در ساختن مجموعه‌ها است. ما اغلب مایلیم دربارهٔ مجموعه‌هایی که نمی‌توانند خیلی خوب تشریح شوند با فهرست کردن عناصر به طور آشکار، یا با اجتماع گرفتن، اشتراک و غیره صحبت کنیم، ولی مجموعه‌هایی که به آسانی توضیح داده می‌شوند را مسکوت می‌گذاریم. نمادهای سازنده مجموعه اغلب نجات می‌بخشند. عقیده مبنی بر تعیین یک مجموعه با استفاده از محمول است، به طور خاص یک مجموعه متشکل از کلیهٔ (اعدادی) اعضایی است که باعث صدق کردن محمومل می‌شوند. در اینجا تعدادی مثال از مجموعه ساخته شده از نمادها وجود دارد:

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid$ عدد اول است n و $n = 4k+1$ برای عدد صحیح$\}$

$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x + 1 > 0\right\}$

$C = \left\{a + bi \in \mathbb{C} \mid a^2 + 2b^2 \leq 1\right\}$

مجموعهٔ A متشکل از کلیه اعداد طبیعی n است که باعث صحیح شدن محمول.

« k در ازاء تعدادی عدد صحیح $n = ۴k + ۱$ یک عدد اول است و n » است. بر این اساس کوچکترین عناصر A به این ترتیب هستند:

۵,۱۳,۱۷,۲۹,۳۷,۴۱,۵۳,,۵۷,۶۱,۷۳,...

تلاش برای نشان دادن مجموعه A با فهرست کردن این تعداد عناصر اولیهٔ این مجموعه به خوبی تأثیرگذار نیست؛ حتی بعد از ده ترم، الگوی مشخصی آشکار نمی‌شود. به همین سان، مجموعهٔ B متشکل از کلیهٔ اعداد حقیقی x است که محمول

$$x^{۳}-۳x+۱>۰$$

صحیح است. در این حالت، توضیح آشکار مجموعهٔ B بصورت عبارتهای فاصله‌دار نیاز به حل یک معادلهٔ درجهٔ ۳ دارد. سرانجام، مجموعه C متشکل از همهٔ اعداد مختلط $a+bi$ نظیر:

$$a^{۲}+۲b^{۲}\leq ۱$$

این یک ناحیهٔ تخم‌مرغی شکل پیرامون مبداء مختصات در صفحهٔ اعداد مختلط است.

۵. ۳ تابع‌ها

یک تابع عناصر یک مجموعه را که دامنه نامیده می‌شود در مجموعه‌ای دیگر به نام برد تخصیص می‌دهد. نماد

$$f:A\to B$$

خاطر نشان می‌سازد که f تابعی است با دامنه، A ، و برد B. به عبارت آشنا "$f(a)=b$" خاطر نشان می‌کند که f عضو $a\in A$ را به b می‌برد. در اینجا b مقدار f در a نامیده می‌شود.

تابع‌ها غالباً بوسیله فورمولهایی که در پی می‌آید تعیین می‌شوند:

$$f_{۱}(x)::=\frac{۱}{x^{۲}}$$

جایی که x یک مؤلفه با مقدار حقیقی است، یا

$$f_{۲}(y,z)::=y۱۰yz$$

جایی که y و z در رشته‌ای از اعداد تغییر می‌کند، یا

$$f_{۳}(x,n)::= \text{زوج}\ (n,x)$$

جایی که n در اعداد طبیعی تغییر می‌کند.

تابع‌های متناهی می‌توانند بوسیلهٔ یک جدول که ارزش تابع را در هر عضو دامنه نشان بدهد، مشخص شوند. مانند تابع $f_۴(P,Q)$ که P و Q مؤلفه‌های گزاره‌ای هستند:

P	Q	$f_۴(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

بخاطر داشته باشید که $f_۴$ همچنین می‌توانست توسط فرمول $f_۴(P.Q)=[P\rightarrow Q]$ توصیف شود.

همچنین یک تابع را می‌توان توسط طرز عمل آن روی هر عضو دامنه‌اش برای محاسبهٔ مقدار آن عضو تعیین نمود یا با برخی از روش‌های دیگر. برای مثال، تعیین $f_۵(y)$ به عنوان طول سمت چپ به راست پژوهش در رشته دو تایی y تا اینکه عدد ۱ آشکار شود باشد، بنابر این

$f_۵(۰۰۱۰)=۳,$

$f_۵(۱۰۰)=۱,$

$f_۵(۰۰۰۰)=$ نا معین است.

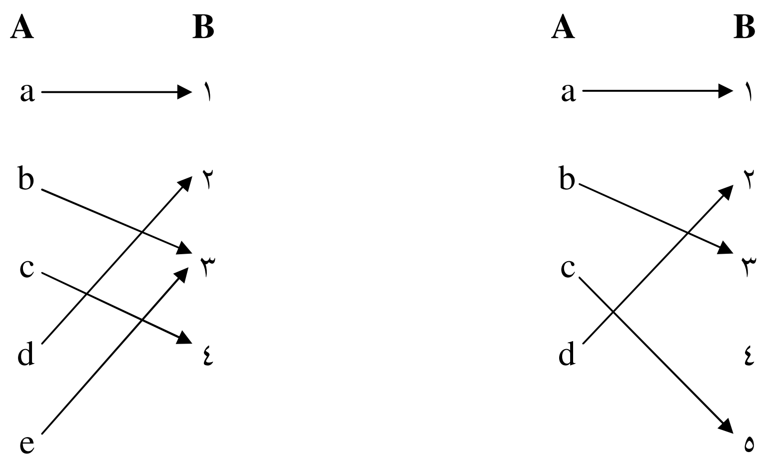
خاصیت‌های محدودی از توابع هستند که موقعی که می‌خواهیم مبحث شمارش را انجام دهیم بـر روابط معینی در میان اندازه‌های دامنــه‌هــا و هــم‌دامنــه‌هــا دلالــت مــی‌کنــد. مــی‌گــوئیم یــک تــابع $f : A \to B$:

- کلی است اگر هر عضو A اختصاص به برخی از عناصـر B داشـته باشـد؛ در غیـر ایـن صورت تابع جزیی نامیده می‌شود،
- پوشا است اگر هر عضو B به حداقل یک عضو از A نگاشت شود،
- یک به یک اگر هر عضو B به حداکثر یک عضو از A نگاشت شود، و
- دوسویی است اگر f کلی، ۱-۱ و پوشا باشد. بخصوص هر عضو B دقیقاً به یک عضـو از A نگاشت می‌شود.

نامهایی مثل "پوشا" "یک به یک" ناامید کننده غیر قابـل حفـظ و غیـر قابـل شـرح دادن هسـتند. برخی از مؤلفین از اصطلاح "بر روی" به جای پوشا و از اصطلاح "یک به یک" به جای یک بـه یک استفاده می‌کنند، که کوتاه‌تر هستند ولی به طور قابل بحثی هم به خاطر سپردنی نیستند.

می‌توانیم همهٔ این ویژگی‌ها را در عبارتهای یک نمودار تشریح کنیم جایی که تمـام عناصـر دامنـه A، در یک ستون ظاهر شود (ستونی بسیار بلند بالا چنانچه A نامحـدود باشـد) و همـهٔ عناصـر هم‌دامنه، B در ستونی دیگر نمایان شود و یک فلش از نقطه‌ای a در ستون اول به سمت نقطه‌ای

در ستون دوم رسم می کنیم جائی که $f\,(a) = b$ برای مثال، اینجا نمودارهایی برای دو گروه تـابع داریم:



در اینجا ببینیم آنچه را تعاریف دربارهٔ چنین تصویرهایی می‌گویند چیست:

- " f عبارت است از یک تابع "به این معنی است که هر نقطه در دامنهٔ ستون، A حداکثر یک فلش از خود بیرون داده است. (چنانچه بیشتر از یک فلش از هر نقطـه‌ای در سـتون اول بیرون بزند پس f مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب خواهد بود نـه یـک تـابع. دربـارهٔ عنوان زوجهای مرتب دو هفتهٔ دیگر بحث خواهیم کرد.)
- " f کلی است" یعنی اینکه هر نقطه‌ای چنانچه در ستون A باشد حداقل یـک فلـش از خود بیرون داده که حقیقتاً به این معنی است که دقیقاً یک فلش از آن بیرون آمـده اسـت چرا که f یک تابع است.
- " f یک تابع پوشا است" یعنی اینکه هر نقطه‌ای در ستون هم‌دامنهٔ B حداقل یک فلش به خود گرفته است.

- " f یک به یک است" یعنی اینکه هر نقطه‌ای در ستون هم‌دامنهٔ B حداکثر یک فلش به خود گرفته است.
- " f دوسویی است" یعنی اینکه هر نقطه‌ای در ستون A دقیقاً یک فلش بیرون از خود دارد و هر نقطه در ستون B دقیقاً یک فلش به سمت خود دارد.

بنابر این در نمودار بالا تابع سمت چپ کلی و پوشا است (هر عضو ستون A یک فلش بیرون داده و هر عضو ستون B حداقل یک فلش به خود گرفته است) ولی یک به یک نیست (عضو ۳ دو فلش به سمت خود دارد) تابع سمت راست کلی و یک به یک است (هر عضو در ستون A یک فلش بیرون داده است و هر عضو ستون B حداکثر یک فلش پذیرفته است) ولی پوشا نیست (عضو ٤ پذیرای هیچ فلشی نیست)

همه چیز دربارهٔ یک تابع با سه مجموعه در گیر است: دامنه‌اش، هم‌دامنه‌اش و مجموعهٔ،

$$\{(a,b) | f(a)=b\}$$

که به آن گراف f می‌گویند. به خاطر داشته باشید که گراف f به سادگی توضیح می‌دهد که فلشها یک نمودار f به کجا بروند.

گراف f خود به خود تصمیم نمی‌گیرد که آیا f کلی است یا پوشا. برای تصمیم‌گیری بر اینکه f کلی است یا نه نیاز داریم بدانیم که دامنه چیست و برای گفتن اینکه f پوشا است نیاز به دانستن هم‌دامنه داریم. برای مثال، تابعی که توسط فرمول $f(x) ::= \frac{1}{x^2}$ تعریف شود در صودتی که دامنه‌اش $\mathbb{R}^+$ باشد کلی است ولی اگر دامنه‌اش تعدادی از مجموعه اعداد حقیقی من‌جمله ۰ باشد f جزیی است. در صورتی که دامنه و هم‌دامنه‌اش هر دو $\mathbb{R}^+$ باشند دو سویی است، ولی

در صورتی که هم‌دامنه و دامنه‌اش هر دو $\mathbb{R}$ باشند، نه یک به یک است نه پوشا. تابع پوشا و تابع یک به یک اندازهٔ نسبتهای معین بین روابط را در دو مورد دامنه‌ها و هم‌دامنه‌ها ایجاب می‌کند.

اگر A یک مجموعه متناهی باشد، منظور از $|A|$ اندازهٔ A است، به معنی آن است که، تعداد اعضای درون A چقدر است.

لم (قانون نگاشت)

- اگر $f : A \to B$ پوشا باشد آنگاه $|A| \geq |B| \Leftarrow$
- اگر $f : A \to B$ یک به یک باشد و کلی آنگاه $|A| \leq |B| \Leftarrow$
- اگر $f : A \to B$ دو سویی باشد آنگاه $|A| = |B| \Leftarrow$

اغلب مفید است که مجموعهٔ مقادیر یک تابع یافت شود، وقتی که دربارهٔ اعضای یک مجموعه به کار می‌رود. بنابر این اگر $A' \subseteq A \quad f : A \to B$

تعریف می‌کنیم $\hat{f}(A') ::= \{b \in B \mid f(a') = b\}$

برای مثال، اگر در نظر بگیریم $[r,s]$ نشانگر بازه از r به s در اعداد حقیقی باشد پس

$\hat{f}_1([1,2]) = [1/4,1]$

برای مثالی دیگر، بیائید در نظر بگیریم "جستجوی یک ١" از تابع f_5. اگر در نظر بگیریم که X مجموعه‌ای از واژه‌های دوتایی باشد که با یک تعداد زوج از ٠ و یک ١ شروع شود، آنگاه $\hat{f}_5(X)$ برابر با اعداد زوج طبیعی خواهد بود.

کاربرد $\hat{f}$ به یک مجموعه A' از مانند "کاربرد f به صورت نقطه‌ای روی A'" است. تمایز میان f و $\hat{f}$ نوعی ناخنک زدن است و این تمرینی ساده برای حذف کلاه روی سر $\hat{f}$ و فقط

f نوشتن است. ما این کار را خواهیم کرد، زیرا که معمولاً آسان است به تصویر کشیدن اینکه آیا f باید برای یک استدلال مجرد بکار رود یا روی یک زیرمجموعه از آنها تحدید شود. امّا، بصورت تکنیکی ، f و $\hat{f}$ توابع کاملاً متفاوتی هستند: برای مثال، دامنهٔ f، A نیست، بلکه زیر مجموعه A است یعنی $P(A)$ و هم‌دامنهٔ $\hat{f}$، $P(B)$ است.

مجموعهٔ مقادیری که از تاثیر f برای تمام مقادیر ممکن ناشی می شود، برد f نامیده می‌شود. که این چنین است. f :=: برد f ((دامنه) f (. برخی از مؤلفین به هم‌دامنه به عنوان منحنی یک تابع رجوع می‌کنند، ولی فرق میان این دو مهم است. منحنی و هم‌دامنهٔ f فقط هنگامی یکی هستند که f پوشا باشد.

۲. آیا براستی این همه تأثیر دارد؟

به این ترتیب این همان جایی است که امروزه جریان اصلی ریاضیات ایستاده است: مشتی پر از اصول که هر چیز دیگری در ریاضیات منطقاً می‌تواند از آن منشعب شود. بیان شبیه موقعیت منحنی گلبرگی است، ولی چندین ابر تیره وجود دارد، به این معنی که عصارهٔ حقیقت در ریاضیات کاملاً حل نشده است.

- اصول ZFC توسط خدا روی سنگ قلم زنی نشده‌اند. در عوض، بوسیله شخصی به نام زِرِملو طراحی شده‌اند. احتمالاً یک روزی او هم کلید خانه‌اش را فراموش کرده است.
- هیچ کس نمی‌داند آیا اصول ZFC منطقاً ثابت شده‌اند، احتمال دارد که یک نفر گزاره p را ثابت کند و دیگری گزاره $\neg p$ را ثابت کند. با این حساب ریاضی داغان خواهد شد. به نظر می‌رسد موقعیت شکاف داری باشد، ولی پیش از این هم روی داده است. در آغاز

صده بیستم، گتلوب فرگهٔ منطق‌دان تلاش اولیه‌ای برای اصالت بخشیدن به تئوری مجموعه‌ها با استفاده از تعداد کمی از اصول پذیرفته شده را شروع کرد. چندین ریاضی‌دان – مشهورترین‌شان برتراند راسل – کشف کرد که اصول فرگه در عمل ضد خود بودند!

- در حالی که اصول ZFC به طور گسترده‌ای ریاضیاتی را پایه‌ریزی می‌کند که هر کسی طالب آن است – جایی که ٦=٣+٣ و دیگر حقایق اولیه که صحیح هستند – همچنین بر نتایج مزاحمت آوری هم دلالت می‌کنند. برای مثال، فرضیهٔ باناخ– تارسکی می‌گوید که یک توپ می‌تواند به شش تکه تقسیم شده و سپس تکه‌ها می‌توانند دوباره طوری تنظیم شوند که دو توپ بدست آید هر کدام هم به اندازهٔ همان توپ اصلی باشد!
- در دهه ۱۹۳۰ گُدل ثابت کرد که، فرضاً که اصول ZFC سازگار باشند، ولی کامل که نیستند: یعنی اینکه گزاره‌هایی وچود دارند که صحیح هستند ولی منطقاً از این اصول پیروی نمی‌کنند. به عنوان یک موضوع واقعی گزاره‌ای که ZFC سازگار است (که خیلی سخت نیست گفتن آن به صورت فورمول برحسب مجموعه‌ها) مثالی از یک گزارهٔ صحیح وجود دارد که نمی‌تواند ثابت شود.

این مسائل در 6.042 ما را دچار مشکل نمی‌کند، ولی برای فکر کردن دربارهٔ آنها جالب توجه‌اند!

نقیضه گویی راسل

برهان آوردن از روی سادگی دربارهٔ مجموعه‌ها، سریعاً به تناقض زیر- معروف به نقیضه‌گویی راسل منجر می‌شود:

فرض کنید S متغیری است که روی تمام مجموعه‌ها دلالت می‌کند و تعریف کنید

$$W ::= \{S \mid S \notin S\}.$$

بنابر این تعریف، برای هر مجموعه S،

$$S \in W \quad iff \quad S \notin S,$$

بطور خاص می‌توانیم فرض کنیم که W ، S باشد و نتیجهٔ متناقض را بدست آوریم که

$$W \in W \quad iff \quad W \notin W.$$

این تناقض آشوبی مهلک در تلاش اولیهٔ فرگه برای طرح فرضیهٔ اصولی کردن مجموعه‌ها پدید آورد. این ضربه‌ای گیج کننده به تلاشهایی بود که درصدد فراهم نمودن زیربنای اصولی برای ریاضیات بودند.

اما چیزی غیر عادی در آن زمان مشخص بود. ما نمی‌توانیم اجازه دهیم که W یک مجموعه باشد. در نتیجه مرحله‌ای از اثبات که اجازه می‌دهیم S، W باشد غیرمجاز است. زیرا S روی مجموعه‌ها می‌تواند تغییر کند و W یک مجموعه نیست.

اجتناب از مجموعه بودن W به این معنی است که ما باید این اصل را که هر دسته خوش-تعریف از عضوهای ریاضی مجموعه است را کنار بگذاریم.

مسئله‌ای که منطق‌دانان با آن مواجه شدند این بود که چگونه قواعد تصمیم‌گیری را اصولی کنند که گروه‌های خوش_تعریف، مجموعه هستند. بلافاصله راسل و همکارش وایت‌هد برسر این مسئله دست به کار شدند و دوازده سال وقت برای پیش برد یک اصل تازهٔ بزرگ در یک گراف تکی عظیم‌تر به نام اصل ریاضیات صرف کردند.

اصول مدرن ZFC برای قضیهٔ مجموعه‌ها ساده‌تر از نظام راسل/وایت‌هد است و نزدیک به اصول اولیهٔ فرگه می‌باشند.

آنها مشخص می‌کنند که مجموعه‌ها باید از مجموعه‌های "ساده‌تر" به روشهای استاندارد مطمئن ساخته شوند. بخصوص هیچ مجموعه‌ای به هیچ وجه عضوی از خودش نیست. بنایر این راه‌حل جدید تناقض‌گویی راسل به ترتیب ذیل است: از آنجا $S \notin S$ به ازاء همهٔ مجموعه‌های S، تبعیت می‌کند که W که در بالا تعریف شد، حاوی همهٔ مجموعه‌هاست. بنابر این W نمی‌تواند یک مجموعه باشد یا اینکه عضوی از خودش خواهد شد.

این عبارت‌ها به ندرت در جریان اصلی ریاضیات مطرح می‌شوند و ابداً در علوم کامپیوتر مطرح نمی‌شوند، جایی که تمرکز به صورت عام روی "قابل شمارش" و اغلب بر مجموعه‌های، فقط متناهی است. در عمل فقط منطق‌دانان و تئوری پردازان مجموعه باید دربارهٔ دسته‌بندی‌هایی که بقدری بزرگ هستند که مجموعه شوند، نگران باشند.