فصل هفتم

ماشین‌های حالتی: پایایی و پایان‌پذیری

۱. ماشین‌های حالتی

ماشین‌های حالتی یک نمونه انتزاعی روندهای مرحله– به– مرحله هستند و از این‌رو در بسیاری از فضاهای علوم رایانه طراحی می‌شوند. ممکن است شما در طی گذراندن یک درس مدار منطقی الکتریکی، یک درس کامپایلر یا درس احتمالات آنها را دیده باشید.

۱. ۱ تعاریف پایه‌ای

یک ماشین حالتی واقعاً بیشتر از یک دیگراف چیزی نیست، جز آن که به رئوس آن "حالت‌ها" بگویند و به یالها "انتقال" بگویند. انتقال (یال) از حالت P به حالت q به صورت $p \to q$ نوشته خواهد شد.

یک ماشین حالتی همچنین در طراحی مجهز به حالت شروع، است.

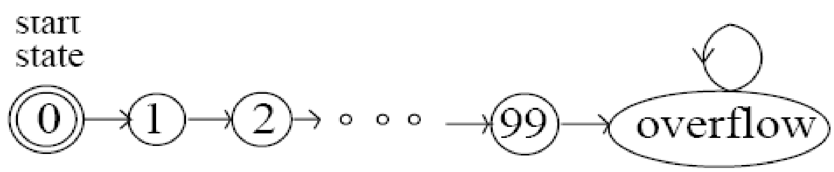
ماشین‌های حالتی که در مدار منطقی و کامپایلرها به کار رفته‌اند معمولاً یک تعداد متناهی حالات را دارند، ولی ماشین‌هایی که نمونه محاسبه‌های متوالی‌اند نوعاً تعداد نامتناهی از حالات را دارند. در بسیاری از کاربری‌ها، انتقال‌ها در گراف‌های حالت با علائم مشخصه برچسب خورده‌اند تا

نمایشگر داده‌های ورودی و خروجی باشند، یا اعدادی که بیانگر قیمت‌ها، گنجایش‌ها، یا احتمالات، باشند. در این یادداشت‌ها، به انتقالهای بدون برچسب نظر داریم.

۲. ۱ مثال‌ها

در اینجا تعدادی مثال‌های ساده درباره ماشین‌های حالتی ارائه می‌شوند.

مثال ۱. ۱ یک ماشین‌حساب محدود که از ۰ تا ۹۹ را محاسبه می‌کند و به ۱۰۰ که رسید برگردانده می‌شود. گراف حالت در تصویر شماره ۱، که حالت شروع آن صفر است نمایش داده می‌شود.



تصویر ۱: گراف حالت ماشین‌حساب محدود ۹۹ عددی

این ماشین همین که یک مرتبه سرریز شود دیگر به درد نمی‌خورد، از آنرو که هیچ راهی برای خلاص شدن از حالت سرریز شدن خود ندارد.

مثال ۲. ۱ یک ماشین‌حساب نامحدود هم همینطور است، ولی مجموعه حالت نامتناهی دارد، که نتیجه آن گرافی نامتناهی است. رسم این کار سخت‌تر است.

مثال ۳. ۱ فیلم‌نامه جان‌سخت ۳ با ظرف‌های آب ۳ و ۵ گالنی را می‌توان به عنوان نمونه‌های ماشین حالتی در نظر گرفت. به جای حالت‌ها می‌توانیم جفت‌ها را به کار ببریم. (b,l) از اعداد حقیقی به طور که $0 \le b \le 5, 0 \le l \le 3$.از آنجا که بروس می‌توانست هر مقدار آب را درون سطل

بریزد فرض می‌کنیم که b و l اعداد حقیقی اختیاری باشند. حالت شروع (۰,۰) است، از آنرو که هر دو ظرف با حالت خالی شروع می‌شوند.

چندین نوع انتقال وجود دارد:

۱- ظرف کوچک را پر کنید: $(l,b)\leftarrow(۳,b)$ برای $l<۳$.

۲- ظرف بزرگ را پر کنید: $(l,b)\leftarrow(l,۵)$ برای $b<۵$.

۳- ظرف کوچک را خالی کنید: $(l,b)\leftarrow(۰,b)$ برای $l>۰$.

٤- ظرف بزرگ را خالی کنید: $(l,b)\leftarrow(l,۰)$ برای $b>۰$.

۵- محتوای ظرف کوچک را درون ظرف بزرگ بریزید: برای $l>۰$.

$$(b,l)\begin{cases}(b+l,۰) & \text{اگر } b+l\le ۵, \text{ فاصله} \\ (۵_{۱}\ell-(-b)) & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که در مقابل ماشین حالت ماشین‌حساب ۹۹ عددی، در ماشین جان‌سخت بیش از یک انتقال ممکن وجود دارد.

مسئله ۱: کدام یک از حالت‌های ماشین جان‌سخت ۳ انتقال‌های مستقیم به دقیقاً دو حالت دارند؟

۳. ۱ انجام کار ماشین‌های حالتی

ماشین جان‌سخت ۳ هر شیوه ریختن آب درون ظرف‌ها را طبق قواعد نمونه مدل می‌کند.

خصوصیات جان‌سخت را که می‌خواهیم بی‌آزمائیم اینک می‌توان گفت که با استفاده از نمونه ماشین حالت ثابت کرد. برای مثال، اگر بروس بتواند به حالتی به شکل $(۴,l)$ دست یابد بمب را خنثی خواهد کرد.

به زبان گراف، یک، مسیر(احتمالاً نامتناعی) در ماشین حالت گراف که از حالت شروع آغاز می‌شود و از یک نظام رفتاری ممکن مطابقت دارد، چنین راهی را انجام کار ماشین حالت می‌نامند. یک حالت وقتی قابل دسترسی نامیده می‌شود که مسیری از حالت شروع به آن حالت وجود داشته باشد، یعنی که، اگر در یک اجرا ظاهر شود.

مشاهده کردیم که حالت (۳ ٤) قابل دسترسی بود، با انعکاس این واقعیت که بروس و ساموئل با موفقیت در جان‌سخت ۳ بمب را خنثی کردند.

۲. قابل دسترسی بودن و پایاها

یک راه حل مفید در بررسی ماشین حالتی، شناسایی خصوصیات حالت‌ها است.

تعریف ۱. ۲ یک پایایی از یک ماشین حالت عبارت است از یک محمول p روی حالت‌های مختلف، به طوری که اگر $p(q)$ در یک حالت q صحیح باشد و $q \to r$ برای یک حالتی دیگر r، آنگاه $p(r)$ صحیح است.

حالا می‌توانیم اصل استقراء را برای ماشین‌های حالتی دوباره مطرح کنیم:

قضیه ۲. ۲ (قضیه پایایی) فرض کنید p یک محمول پایا روی یک ماشین حالتی باشد. اگر p در حالت شروع برقرار باشد، آنگاه p برای تمام حالت‌های قابل نیز برقرار است.

حقیقت قضیه پایایی به وضوح حقیقت اصل استقراء است. آن را ثابت خواهیم کرد، البته، با توجه به استقراء بر طول اجراهای متناهی، ولی باعث رنجش نخواهیم شد.

۱. ۲ جان سخت یک بار و برای همیشه

حالا به جان‌سخت یکبار برای همیشه باز می‌گردیم. این بار یک ظرف ۹ گالنی به جای ظرف ۵ گالنی داریم. می‌توانیم این موضوع را با ماشین حالتی که حالات و انتقال‌های شبیه به ماشین (ماشین) جان‌سخت ۳ دارند مقایسه کنیم، با کلیه رویدادهای "۹" که جایگزین "۵" بشوند.

حالا رسیدن به هر حالت شکل $(۴,\ell)$ غیرممکن است. با استفاده از قضیه پایایی این را ثابت می‌کنیم. مثلاً، محمول $p((b,l))$ را پایا گوییم، هرگاه که l,b مضرب‌های غیرمنفی ۳ باشند. بنابراین p به صورت آشکار روی حالت $(۰,۰)$ صدق می‌کند.

برای برهان اینکه p یک پایا است، فرض می‌کنیم $p((b,l))$ در حالت‌ی از (b,l) صادق باشد و نشان می‌دهیم که اگر $(b,l)\rightarrow(b',l')$ پس آنگاه $p(b',l')$ نیز صادق است. برهان به چند مورد تقسیم می‌شود، بر همان اساس که قانون انتقال به کار می‌رود. برای مثال، در نظر بگیرید که انتقال از قانون "ظرف کوچک را پر کنید" ادامه پیدا کند. معنی‌اش این است که $(b,l)\rightarrow(b,۳)$ ولی $p(b,l)$ دلالت می‌کند که b مضرب عدد صحیح ۳ است و البته ۳ یک مضرب صحیح ۳ می‌باشد، بنابراین p همچنان در حالت جدید با $(b,۳)$ صادق است. مثال دیگر وقتی است که قانون بکار رفته انتقال "ریختن از ظرف بزرگ درون ظرف کوچک" باشد برای زیر حالتی که $b+l>۳$ آنگاه حالت به صورت $(b,l)\rightarrow(b-(۳-l),۳)$ در می‌آید ولی از آنجا که l,b مضربهای صحیح ۳ هستند بنابراین $b-(۳\text{-}l)$ هم همینطور است. بنابراین، در این مورد هم بعد از انتقال صادق است.

برای بررسی موارد باقی‌مانده، که همه را می‌تـوان بـه راحتـی بررسـی نمـود خـود را بـه دردسـر نمی‌اندازیم. حالا با قضیه پایایی، نتیجه می‌گیریم که هر حالت قابل دسترس با p جور در می‌آید. ولی از آنجا که هیچ حالتی از شکل $(۴,l)$ در p صدق نمی‌کند، بطور محکمی ثابـت کـردیم کـه بروس یکبار و برای همیشه می‌میرد!

۲. ۲ روبات

یک روبات را در نظر بگیرید. سوار بر شبکه ریل مانندی به حرکت در می‌آید و در هر مرحله یک واحد به شمال یا جنوب و یک واحد به شرق یا غرب می‌رود. (جمله آخر را دوباره بخوانید، اگـر حرکت روبات مستقیم ندارید، بازنده خواهید شد!) روبات از موقعیت $(۰,۰)$ آغـاز مـی‌کنـد. آیـا روبات می‌تواند به موقعیت $(۱,۰)$ برسد؟

به منظور کمی الهام گیری، می‌توانیم مقداری حرکات روبات را تشبیه سازی کنیم، برای مثـال، بـا شروع در $(۰,۰)$ روبات می‌توانست به شمال‌شرقی به $(۱,۱)$ برود، بعد به جنوب‌شرقی بـه $(۲,۰)$، بعد به جنوب‌غربی $(۱,۱-)$ و باز دوباره به جنوب‌غربی $(۰,۲-)$ برود.

بیائید مسئله را به شکل یک ماشین حالت نمونه سازی کنیم و سپس یک پایـای مناسـب را ثابـت کنیم. یک حالت جفتی از اعداد صحیح خواهد بود که متناظر با مختصات موقعیت روبـات اسـت. حالت (i,j) انتقال‌هایی به چهار حالت متفاوت دارد:

$$(i \pm l, j \pm ۱)$$

حالا مسئله، انتخاب یک پایای مناسب است، p، که برای وضعیت شروع $(۰,۰)$ صحیح و برای وضعیت $(۱,۰)$ غلط باشد. سپس قضیه پایایی ایجاب می‌کند که روبات هیچ‌گاه به $(۱,۰)$ نمی‌رسد. تلاشی مستقیم در یک پایا این است که فرض $p(q)$ برقرار باشد که $q \neq (۱,۰)$.

متأسفانه، این کارگر نمی‌افتد. حالت (۲.۱) را در نظر بگیرید. به‌وضوح $p((۲.۱))$ صادق است چون‌که $(۱,۰) \neq (۲.۱)$ و البته $p((۱,۰))$ صدق نمی‌کند. ولی $(۲,۱) \rightarrow (۱,۰)$ بنابر این از انتخاب p، یک پایا حاصل نمی‌شود.

به گزاره‌ای قوی‌تر نیازمندیم. با نگاه کردن به مثال اجرایی شاید بتوانید حدس درستی بزنید، مثلاً، آن که مجموع مختصات‌اش عددی زوج است. اگر بتوانیم پایا بودنش را ثابت کنیم، آنگاه ثابت کرده‌ایم که روبات هرگز به موقعیت $(۱,۰)$ نمی‌رسد چون که مقدار ۰+۱ یک عدد زوج نیست، ولی مقدار ۰+۰ مختصات وضعیت شروع یک عدد زوج است.

قضیه ۳. ۲ مقدار مجموع مختصات روبات همیشه زوج است.

برهان. برهان از قضیه پایایی بهره می‌گیرد.

فرض کنید $p((i,j))$ گزاره‌ای باشد که $i+j$ زوج است.

ابتدا، باید نشان دهیم که گزاره مورد نظر برای وضعیت شروع $(۰,۰)$ صادق است. ولیکن $((۰,۰))$ برقرار چون‌که ۰+۰ زوج می‌شود.

سپس، باید نشان دهیم که p پایا است، یعنی که، باید نشان دهیم که برای هـر انتقـال، اگـر $i+j$ زوج و $(i,j)\rightarrow(i',j')$ آنگاه $i'+j'$ زوج است. ولی با توجه به تعریـف انتقـال‌هـا $i'=i\pm۱$ و $j'=j\pm۱$ بنابراین $i'+j'$ برابر است با $i+j+۲$، و یا $i+j-۲$ که همگی زوج هستند. □

قضیه فرعی ٤. ۲ روبات نمی‌تواند به $(۱,۰)$ برسد.

مسئله ۲. روبات بر روی نوار نقاله صحیح دو بعدی حرکت می‌کند. از $(۰,۰)$ آغاز می‌کند و مجاز به حرکت در هر یک از این چهار جهت است:

۱- $(+۲,-۱)$ ۱پائین و ۲راست

۲- $(-۲,+۱)$ ۱بالا ۲چپ

۳- $(+۱,+۳)$

٤- $(-۱,-۳)$

ثابت کنید که این روبات هرگز به $(۱,۱)$ نخواهد رسید.

۳. مثال‌های از الگوریتم دنباله‌ای

قضیه پایایی در سال[۱] ۱۹۶۷ توسط رابرت فلوید در مؤسسه تکنیکی کارنژی ارائه شد.

پیش از آن فلوید به خاطر کـار بـر روی گرامرهـای رسـمی کـه نفـوذ زیـادی بـر طراحـی زبـان برنامه‌نویسی و تعیین اجزاء و ترکیبات جمله بود معروف گردیده بـود، در واقـع، علـت آن کـه او استاد بود بدون اینکه هیچ وقت $ph.D$. بگیرد همین مسئله بود.

۱. سال بعد، مؤسسه تکنیکی کارنژی به دانشگاه کارنژی – ملون تغیر نام داد.

در همان سال، آلبرت. آر. مایر به عنوان استادیار موسسه صنعتی کارنژی در بخش علوم محاسباتی منصوب شد و همانجا با فلوید برای اولین بار ملاقات کرد. فلوید و مایر تنها تکنسین‌های آن بخش بودند و از صحبت کردن درباره علایق مشترک خود به شوق آمده بودند. بعد از کمی گفتگو، همکار تازه جوان فلوید به این نتیجه رسید که فلوید با هوش‌ترین فردی است که تا کنون دیده بود. طبیعتاً، اولین موردی را که فلوید مایل بود به مایر بگوید، قضیه جدید، تا آن وقت منتشر نشده پایاهایش بود. فلوید نتایج را برای مایر شرح داد و مایر نمی‌توانست بفهمد چه چیزی فلوید را تا این حد هیجان زده کرده است. در واقع، مایر در عجب بود (البته درون خود) که آدمی به فرزانگی فلوید چطور با مشاهده امری چنین بدیهی به هیجان در آمده بود. فلوید می‌بایست یک سری از مثال‌های شبیه به همان‌هایی که در پی این یادداشت‌ها می‌آیند را به مایر نشان می‌داد قبل از آنکه مایر بفهمد که هیجان فلوید در حقیقی بودن کاملاً آشکار قضیه پایایی نبود. بلکه بیشتر در چشم‌اندازی که چنین قضیه ساده‌ای می‌توانست چنین گسترده و به آسانی در برنامه‌های پژوهشی به کار رود.

فلوید سال بعد به استنفورد رفت. او "جایزه نوبل" متعلق به تورینگ را در علوم کامپیوتر برنده شد– در اواخر دهه ۱۹۷۰، خاطر هر دو کارش که گرامر و تحقق برنامه‌نویسی بود از سال ۱۹۶۸ تا هنگام مرگ در سپتامبر ۲۰۰۱ در دانشگاه استنفورد باقی‌ماند. در ستایشی از فعالیتها و زندگی فلوید، نزدیک‌ترین همکارش، دان‌کنوت، در سایت www.acm.org اطلاعات جامعی را ارائه نموده است.

بوسیله الگوریتم اقلیدس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عقیده فلوید را به تصویر خـواهیم کشـید. مثال دیگر در مسائل کلاس مطرح می‌شود.

۱. ۳ اثبات درستی

اصولاً تمیز دادن دو جنبه‌ی فرایند درستی ماشین حالت، مفید است:

۱– این خاصیت که نتیجه نهایی، هرچه باشد، از فرایند، نیازمندی‌های سیستم را برآورده مـی‌کنـد. به این گویند صحت جزئی.

ممکن است تصور کنید که اگر نتیجه‌ای جزعاً درست باشد، پس چه بسا که جزعـاً هـم نادرسـت باشد، ولی این آن چیزی نیست که در اینجا مورد نظر اسـت. واژه "جزئـی" منشـعب از نگـاه بـه فرآیندی است که شاید در محاسبه یک تابع جزئی خاتمه نیابد. بنابراین صحت جزئی به این معنی است که وقتی نتیجه‌ای در کار باشد، صحیح است، ولی چه بسا که فرایند همیشه به نتیجـه منجـر نشود، شاید به این دلیل که در یک حلقه قرار گیرد.

۲– این خاصیت که فرایند مورد نظر همیشه به پایان می‌رسد یا برای ارائه خروجـی‌هـای مطلـوب تضمین دارد. این را می‌گویند اتمام.

صحت جزئی را می‌توان به طور مشترک با استفاده از قضیه پایایی اثبات نمود.

۲. ۳ الگوریتم اقلیدس

پیش از این الگوریتم اقلیدس را برای محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشـترک $\gcd(a,b)$ معرفـی کرده‌ایم. می‌توانیم مجدداً این الگوریتم را به عنوان ماشین حالت معرفـی کنـیم. یـک حالـت یـک

جفت عدد صحیح (x, y) خواهد بود، که می‌توانیم به آن مانند عدد صحیحی ثبت در یک برنامه ثبت نگاه کنم. انتقال‌های حالت با قانون زیر معین می‌شوند.

$$(x, y) \to (y, \text{باقیمانده}(x, y)) \qquad \text{اگر} \quad y \neq 0$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که:

۱- با شروع از مرحله‌ای با $x = a \quad , y = b$ اگر به پایان برسم، آنگاه پاسخ مان صحیح خواهد بود. یعنی که، در پایان، $x = \gcd(a,b)$ این یک ادعا درستی جزئی است.

۲- ما عملاً به پایان می‌رسانیم. این یک قضیه فرایند به پایان بردن است.

۱. ۲. ۳ صحت جزئی GCD

ابتدا بیائید ثابت کنیم که اگر GCD پاسخی ارائه کند، آن پاسخ درست است. بویژه فرض کنید $d ::= \gcd(a,b)$. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر راه حل در حالت (x, y) به پایان برسد، آنگاه

$$x = d$$

برهان. بنابراین گزاره حالت را تعریف کنید

$$p((x, y)) ::= [\gcd(x, y) = d, (x > 0 \ \text{یا} \ y > 0)]$$

p برای حالت شروع صادق است (a,b) با تعریف d و الزام اینکه حداقل یک a و b مثبت است. همچنین، p یک پایا است زیرا

$$\gcd(x, y) = \gcd(y \ \text{و} \ \text{باقی‌مانده}(x, y))$$

برای تمام $x, y \in \mathbb{N}$ به طوری که $y \neq 0$ همان طور که در یادداشت‌های مربوط به قضیه اعـداد به آنها اشاره کردیم، با نظر به قضیه پایایی، به تمام حالت‌های قابل دسترس دست می‌یابیم.

از آنرو که تنها قاعده به پایان رساندن این است که $y = 0$، پـس اگـر (x, y) یـک حالـت پایـانی باشد، آنگاه $y = 0$. اگر حالت پایانی قابل دسترس باشد، پس پایا (x, y) صادق است. این دلالـت می‌کند که $\gcd(x, 0) = d$ و چون $x > 0$ نتیجه‌گیری می‌کنیم که $x = \gcd(x, 0) = d$ □

۲. ۲. ۳ پایان *GCD*

اینک به دومین ویژگی رو می‌آوریم، که راه حل باید پایان پذیرد. برای اثبات این، توجه کنیـد کـه y بعد از هر انتقال به شدت کوچکتر می‌شود.

آن به این دلیل است که مقدار y بعد از انتقال، باقی‌مانده تقسیم x بر y است و این بـاقی‌مانـده کوچکتر از y با توجه به تعریف است. ولی مقدار y همیشه یک عدد طبیعی اسـت، بنـابراین بـا اصل خوش‌ترتیبی، به کمترین مقدار نزد تمام مقادیر در حالت‌های قابل دسترس نایل می‌شود. ولی یک انتقال از یک حالت که y کمترین مقدار خود را دارد، نمی‌تواند موجود باشد، زیرا انتقـال y را همچنان بیشتر کاهش می‌دهد. بنابراین حالت قابل دسترس در جائی که y کمترین مقدار خـود را دارد حالتی است که در آن هیچ مرحله دیگـری ممکـن نیسـت، یعنـی کـه، در راه حـل پایـان می‌پذیرد. توجه کنید که این استدلال ثابت نمی‌کند که کمترین مقدار y صـفر اسـت، فقـط ثابـت می‌کند که کمترین مقدار در پایان واقع می‌شود. ولی قبلاً یادآوری کرده‌ایم که تنها قاعده بـه پایـان

رساندن $y=0$ است، بنابراین در ادامه می‌رسیم به این که کمترین مقدار y در واقع باید صفر باشد.

۳. ۳ توسیع الگوریتم اقلیدس

یک توسیع الگوریتم اقلیدس وجود دارد که از آن بجای خرد کردن می‌توان استفاده کرد تا gcd دو عدد صحیح و ترکیب خطی صحیح را عنوان نمود. به خصوص، اعداد طبیعی y,x با $y>0$ را در نظر بگیرد. ادعا می‌کنیم که عملگر زیر در اعداد صحیح t,s در مکانهای T,S متوقف می‌شود جایی که $sx+ty=\gcd(x,y)$.

ورودی: $x, y \in \mathbb{N}, y>0$

متغیرها: $X,Y,S,T,U,V,Q.$

توسیع الگوریتم اقلیدسی

$X:=m,\ \ Y:=n;\ \ S:=0;\ \ T:=1;\ \ U:=1;\ \ V:=0;$

دور:

اگر $Y|X$ و آنگاه متوقف شود

در غیر این صورت

$Q:=(X,Y)$ مقسوم‌علیه;

تخصیص‌های زیر در متغیرها بصورت همزمان هستند ; ;

$\{X:=Y,$

$Y = (X, Y)$ باقیمانده

$U := S,$

$V := T,$

$S := U - Q * S,$

$T := V - Q * T\};$

برو تو دور

توجه کنیدکه y, x، رفتاری دقیقاً مانند الگوریتم اقلیدسی CGD در بخش ۲. ۳ دارند بجز آنکه روش توسیع یک مرحله زودتر متوقف می‌شود و $\gcd(x, y)$ در Y است وقتی که الگوریتم توقف می‌کند. در نتیجه برای تمام ورودی‌های y, x این الگوریتم به شکل الگورتم اقلیدسی عمل می‌کند محتوی، y از Y که یک متغیر طبیعی مقدار است هر لحظه در دور اکیداً نزول می‌کند.

ادعا می‌کنیم که خصوصیت پایا، که می‌تواند درستی جزئی را ثابت کند عبارت است از

$$\gcd(X, Y) = \gcd \quad a; b \qquad (۱)$$

$$Sa + Tb = Y, \qquad (۲)$$

$$Ua + Vb = X. \qquad (۳)$$

برای بررسی این تساوی‌ها توجه کنید که تساوی اول همان تساوی است که در الگوریتم تقسیم داشتیم. برای بررسی دو تساوی دیگر، فرض کنیم v, u, t, s, y, x محتوای V, U, T, S, Y, X در مرحله شروع دور باشند و فرض کنیم تمام تساوی‌ها برای این مقادیر برقرار باشند. باید ثابت

کنیم که (۲) و (۳) برای محتواهای جدید v',u',t',s',y',x' از متغیرها در زمان بعد از دور نیز برقرار است ((۱)را قبلاً ثابت کرده‌ایم).

بنابر روش الگوریتم، $x'=y$ ،$v'=t,\ \ u'=s$. در نتیجه تساوی (۳) برای x',v',u' برقرار است زیرا تساوی (۲) برای $y,\ldots t,s$ برقرار بود.

همچنین $s'=u-qs$ ،$y'=x-qy,\ \ t'=v-qt$ خارج قسمت (x,y) است. بنابراین

$$s'a+t'b=(u-qs)a+(v-q)b=ua+vb-q(sa+tb)=x-qy=y'$$

از اینرو تساوی (۲) هم برای y',t',s' برقرار است.

همچنین، بررسی صحت سه تساوی درست قبل از اولین شروع حلقه آسان است. مثلاً، در نقطه شروع $X=a,Y=b,s=0,T=1$ بنابر این $sa+TB=0a+1b=b=Y$

بنابراین (۲) صادق است؛ همچنین $U=1,V=0$ و $Ua+Vb=1a+0b=a=x$ بنابر این (۳) صحیح است. به این ترتیب با توجه به قضیه پایایی، آنها در پایان صحیح هستند. ولی در پایان (اتمام) محتواهای Y، از ثبت y تقسیم می‌شود بر محتواهای X، از ثبت x تقسیم می‌شود. بنابراین متساوی‌های (۱) و (۲) دلالت می‌کنند

$$\gcd(a,b)=\gcd(X,Y)=Y=Sa+Tb$$

بنابراین gcd را در Y و ضرایب مطلوب را در S,T خواهیم داشت.

٤. متغیرهای مشتق

برهان‌های اتمام پیشین، در پی یافتن یک اندازه مقدار عدد طبیعی هستند تابه حالتهای تخصیص دهد. ممکن است این اندازه را "سایز" حالت بنامیم.

آنگاه نشان دادیم که سایز هر حالت با هر انتقال حالت کاهش یافت. بوسیله اصل خوش‌ترتیبی، سایز نمی‌تواند تا بی‌نهایتً کاهش بیابد، بنابراین وقتی که سایز حالت حداقلی بدست آید، هیچ انتقال ممکن نمی‌شود: فرایند پایان یافته است.

به طور کلی‌تر، فن تعیین کردن مقدارهای حالت – ضرورتاً نه اعداد طبیعی و ضرورتاً نه کاهنده تحت انتقال – اغلب در تجزیه الگوریتم‌ها مفید است. تابع‌های بالقوه نقشی همانند در فیزیک ایفا می‌کنند. در زمینه فرایندهای محاسباتی، چنین مقدار تخصیص برای حالت‌ها را متغیر مشتق می‌نامند.

برای مثال، برای ماشین‌های جان‌سخت می‌توانستیم یک متغیر مشتق را معرفی کنیم، $\mathbb{R} \rightarrow$ حالتها: f برای مقدار آب موجود در دو سطل، با قرار دادن $f((a,b))::=a+b$. همین طور هم، در مسئله روبات، موضع روبات در طول محور x توسط متغیر مشتق فرضی می‌تواند ارائه شود. $x\,coord$ جایی که $x-coord((i,j))::=i$

می‌توانیم روش اتمام کلی خود را به شکل زیر فورمول نویسی کنیم:

تعریف ۱. ٤ یک متغیر مشتق $f:$ حالت‌ها $\rightarrow \mathbb{R}$

اکیداً نزولی است اگر و فقط اگر

$$q \to q' \text{ ایجاب کندکه } f(q') < f(q)$$

قضیه ۲. ٤ اگر f یک متغیر مشتق اکیداً نزولی از یک ماشین حالت باشد که فقط مقادیر صحیح غیرمنفی را بگیرد، آنگاه طول هر اجرا که در حالت q شروع شود حداکثر $f(q)$ می‌باشد.

البته می‌توانستیم قضیه ۲. ٤ را به کمک استقراء بر مقدار $f(q)$ ثابت کنیم. ولی درباره آنچه می‌گوید فکر کنید: "اگر شروع به شمارش از عدد طبیعی $f(q)$ به پایین کنید، نمی‌توانید بیشتر از $f(q)$ بار بشمارید. "این یکی را ملاحظه کنید، قضیه به قدری آشکارا است که هیچ کس از اینکه یک برهان را حذف کنیم احساس محرومیت نمی‌کند.

قضیه فرعی ۳. ٤ اگر یک متغیر مشتق طبیعی مقدار اکیداً نزولی برای یک ماشین حالت، وجود داشته باشد آنگاه هر اجرای آن ماشین خاتمه می‌یابد.

اینک تعدادی دیگر از مزه‌های مفید متغیرهای مشتق را تعریف می‌کنیم که مقادیر خود را بر مجموعه‌های جزعاً مرتب می‌گیرند. تعمیم مفاهیم آشنای $\le$ و $>$ برای ترتیب اعداد حقیقی مفید است: اگر $\preceq$ یک ترتیب جزئی در یک مجموعه A باشد، سپس $\prec$ را ترتیب‌جزئی اکید متناظراتی تعریف کنید.

$$a \prec a' ::= \quad a \preceq a' \wedge a \neq a'.$$

تعریف ٤. ٤ فرض کنید $\preceq$ یک ترتیب جزئی در یک مجموعه A باشد. یک متغیر مشتق $f : Q \to A$ اکیداً نزولی نسبت به $\preceq$ است اگر و فقط اگر

$q \to q'$ ایجاب می‌کند $f(q') \neq f(q)$ و $f(q') \preceq f(q)$

به طور ضعیف نزولی است اگر و فقط اگر

$q \to q'$ ایجاب می‌کند $f(q') = f(q)$ یا $f(q') \leq f(q)$

متغیرهای مشتق اکیداً صعودی و به طور ضعیف صعودی به طور مشابه تعریف می‌شوند.

وجود یک عدد طبیعی به عنوان متغیر مشتق بطور ضعیف نزولی ضمانتی بر پایان هر اجراء نیست. به این دلیل است که یک اجراء نامتناهی را می‌توان از طریق حالت‌هائی که در آن یک متغیر بطور ضعیف نزولی ثابت مانده باشد ارائه نمود.

۵. مسئله ازدواج پایدار

بسیار خوب، مراجعه مکرر همگان به متغیرهای مشتق ممکن است که به انتظارات زناشویی شما کمک نکند. ولی اگر تحلیل بشوند مفید واقع می‌شوند!

۱. ۵ مسئله

فرض کنید که n پسر و n دختر باشند. هر پسر تمام دخترها را بر اساس ترجیح‌های خود دسته بندی می‌کند و هر دختر همه پسرها را دسته‌بندی می‌کند. برای مثال، چه بسا باب، آلیس را از همه بیشتر، کارول را بعد، هایدل را در مرتبه سوم بخواهد، و الی آخر. هیچ پیوندی در دسته‌بندی افراد وجود ندارد؛ باب نمی‌تواند کارول و هایدل، گارد را به یک اندازه دوست بدارد. از این‌رو هم ترجیحات در ابتدا مشخص شده و برای همیشه ثابت است.

هدف کلی ازدواج همه پسرها و دخترهاست بطوری که همه شاد شوند و راضی باشند؛ همین الان صریح‌تر خواهیم گفت. هر پسر باید دقیقاً با یک دختر ازدواج کند و بر عکس — از چند همسری خبری نیست.

اگر که می‌خواهیم این ازدواج دوام بیاورد، پس مایلیم از یک جور کردن بی ثبات اجتناب کنیم:

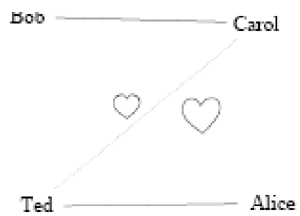
تعریف ۱. ۵ مجموعه‌ای از ازدواج بی ثبات است اگر یک پسر و یک دختر هر کدام دیگری را به همسرشان ترجیح بدهند.

برای مثال، فرض کنید باب و کارول ازدواج کنند و تد با آلیس ازدواج کند، متأسفانه، کارول تد را بیشتر از باب دوست دارد و تد کارول را بیشتر از آلیس دوست دارد. این وضعیت در تصویر شماره ۲ نشان داده شده است. بنابر این کارول و تد هر دو شادمان‌تر خواهند بود اگر با هم بگریزند. می‌گوئیم که کارول وتد یک جفت رذل هستند، برای اینکه موقعیتی است که در آن رفتار رذیلانه تشویق می‌شود.

تعریف ۲. ۵ یک مجموعه ازدواج ثابت است اگر جفت‌های رذل در آن نباشند یا، به طور معادل، اگر مجموعه ازدواج، بی‌ثبات نباشد.

حالا می‌توانیم دقیقاً *مسئله ازدواج پایدار* را بیان کنیم: یافتن همسر برای همه تا اینکه مجموعه نتایج ازدواج‌ها پایدار باشد. معلوم هم نیست که این هدف قابل دسترس باشد! در واقع، در میان روشن دلان رفیق پا برجا، جایی که آدمهای هر جنسی می‌توانند با هم یار شوند، ممکن است هیچ

زوج‌یابی ثابتی در کار نباشد! با این وجود، برای مسئله ازدواج "پسر – دختر" یک مجموعه پایدار ازدواج همیشه وجود دارد.



تصویر شماره ۲: باب با کارول ازدواج کرده و تد با آلیس ازدواج کرده است، ولی تد کارول را به همسرش ترجیح می‌دهد، و کارول تد را به شوهرش ترجیح می‌دهد. بنابراین تدوکارول یک زوج رذل هستند، ازدواج کنونی خود را ناپایدار می‌کنند.

اتفاقاً، با این وجود که نمادشناسی کلمات "ازدواج– پسر– دختر" به خاطر سپردن تعاریف را آسان‌تر می‌سازد (امیدواریم به کسی بر نخورد) حل‌هایی مفید برای مسئله ازدواج پایدار هستند. الگوریتم ازدواج پایداری که شرح می‌دهیم برای اولین بار در مقاله‌ای در سال ۱۹۶۲ توسط دی‌گیل و ال‌اس‌شیپ‌لی مطرح شد. در زمان انتشار، گیل و شیپ‌لی از میزان بسیار مؤثر الگوریتمشان غافل بودند.

این الگوریتم توسط سازمان برنامه ملی جور کردن دستیار متخصص (*NRMP*) برای تعیین دستیاران متخصص، ده سال قبل از ارائه مقاله مورد استفاده قرار گرفته بود و اکثر بیمارستان‌های بزرگ دست به این کار (در نقش دختران) زدند، *NRMP* از آغاز قرن بیستم، گروهی از کار آموزان فارغ التحصیل دبیرستانی را برگزیده (در نقش پسران) تا در بیمارستان‌ها دوره ببینند (رسماً به آن "دوره دستیاری" می‌گویند). قبل از آنکه طرز کار اطمینان‌یابی بر سر همتاهای ثابت انجام شود، فاصله گیری‌های مزمن و اقدام‌های متقابل ناشیانه اتفاق می‌افتاد تا اینکه عده‌ای

فارغ‌التحصیل را برای این دوره‌ها در نظر بگیرند. طرز عمل ازدواج پایـدار در سـال ۱۹۵۲ توسـط *NRMP* کشف و مورد استفاده قرار گرفت. آن انجمن به قدری مسئله را موفقیت‌آمیز حـل کـرد، که آن طرز عمل به طور اصولی بدون تغییر تا سال ۱۹۸۹ مورد استفاده قرار می‌گرفت.

بیائید یک مجموعه پایدار ازدواج را در یک موقعیت ممکن پیدا کنیم و بعد از آن روش خود را به یک الگوریتم کلی برسانیم. جدول زیر ترجیح‌های هـر دختـر و پسـر را در تربیـت نزولـی نشـان می‌دهد.

دخترها	پسرها
$A:35214$	$1:CBEAD$
$B:52143$	$2:ABECD$
$C:43512$	$3:DCBAE$
$D:12345$	$4:ACDBE$
$E:23415$	$5:ABDEC$

چطور است یک راه کار "طمع کارانه" را بیازمائیم؟ به سادگی هر پسر را به نوبت مـی‌بـریم و بـا فرد مورد علاقه‌اش از دخترانی که هنوز در دسترس هستند جفت می‌کنـیم. نتـایج زیـر بـه دسـت می‌آید.

$$\begin{aligned}1 &\rightarrow C\\ 2 &\rightarrow A\\ 3 &\rightarrow D\\ 4 &\rightarrow B\\ 5 &\rightarrow E\end{aligned}$$

برای تعیین پایداری این مجموعه ازدواج‌ها، باید بررسی کنیم که آیا زوج‌هـای رذل در میـان آنهـا هست. همه پسرهای ۱، ۲ و ۳ انتخابهای عالی خود را در میان دختران دارند، هیچ کـدام در فکـر فرار کردن نیستند. پسر ۴ ممکن است مشکل داشته باشد چـون کـه او دختـر A را از همسـرش

بیشتر دوست دارد، ولی دختر A او را به عنوان آخرین تیر ترکش می‌خواهد. با این وجـود، پسـر ۴ و دختر C یک زوج رذل را تشکیل می‌دهند!

ازدواج‌ها پایدار نیستند. می‌توانستیم جفت‌هایی را برای ایـن منظـور خـاص درسـت کنـیم، ولـی براستی که ما در تلاشیم یک استراتژی کلی را بنا بگذاریم. یک راه دیگر استفاده از استقراء اسـت. فرض کنید پسر ۱ و دختر دلخواهش C را با هم برسانیم، سعی کنید نشان بدهید که هیچکدام از این دو نفر یک جفت رذل نمی‌شوند و بعد مسائل باقی‌مانده را با استقراء حل کنید. کـاملاً روشـن است که پسر ۱ از انتخاب بالای خود (گزیـده عـالی خـود) دختـر C دسـت بـرنمـی‌دارد. ولـی مسئله‌ای که با این طرز رفتار می‌کند این است که نمی‌توانیم مطمئن باشیم کـه دختـر C در یـک زوج رذل قرار نخواهد گرفت. چه بسا دختر C پسر ۱ را خیلی ارزان بفروشد – چه بسا آن پسـر را هم در آخرین نوبت رده‌بندی کند!

این دیگر یک مسئله حقه بازی (فریب) را نشان می‌دهد. بهتـرین راه اسـتفاده از همسـریابی آئـین است که در برخی ادوار اساطیری شهره بوده است.

۲. ۵: الگوریتم همسریابی آئینی

۲. ۵ الگوریتم را به عنوان همسریابی آئینی که در طی چندین روز روی می‌دهد را شرح خـواهیم داد. رویدادهای زیر هر روزه اتفاق می‌افتند:

صبح: هر دختر در بالکنش می‌ایستد. هر پسر زیر بالکن دختر مورد علاقـه خـود در لیسـت خـود می‌ایستد و برایش آواز عاشقانه سر می‌دهد. اگر پسری هیچ دختر دیگری در فهرسـت‌اش نمانـده

باشد، در خانه می‌ماند و ۶.۰۴۲ تمرینش را حل می‌کند. بعد ازظهر: هر دختری که یک نفر یا تعدادی خواستگار آواز عاشقانه خوان داشته باشد، به خواستگار دلخواه خود می‌گوید "شاید ...، فردا هم بیا". به دیگران، می‌گوید "نه. ابداً با تو ازدواج نخواهم کرد! راه باز جاده درازا!"

غروب: هر پسری که راه باز جاده دراز را از یک دختر شنیده باشد، آن دختر را از فهرست خود بیرون می‌گذارد.

شرط اتمام: وقتی که هر دختر حداکثر یک خواستگار داشته باشد، آئین مقرر می‌دارد که هر دختر با خواستگارش ازدواج کند، اگر خواستگار داشته باشد.

تعدادی حقایق درباره این الگوریتم وجود دارد که مایلیم آنها را اثبات کنیم:

- الگوریتم خاتمه می‌یابد
- هر کسی با ازدواج کارش تمام است.
- ازدواج‌های نتیجه پایدارند.

وانگهی، مایلیم اگر الگوریتم حق به جانب است را بدانیم. آیا هر دو گروه پسران و دختران در پایان به یک اندازه شادند؟

۳. ۵ ماشین حالت مدل

قبل از اینکه چیزی را ثابت کنیم، باید تعاریف ریاضی واضحی از آنچه می‌خواهیم درباره آنها حرف بزنیم داشته باشیم در این بخش چگونگی ارائه طرح اولیه یک ماشین حالت مدل دقیق از مسئله ازدواج را تعریف می‌کنیم.

پس بیائید به طور رسمی تعریف مسئله را شروع کنیم.

تعریف ۳. ۵ یک مسئله ازدواج تشکیل می‌شود از دو مجموعه جـدا از هـم از سـایز $n \in \mathbb{N}$ کـه تعداد پسرها و دخترها نامیده می‌شوند. اعضاء پسرها موسوم به پسران است و اعضاء دخترهـا بـه نام دختران خوانده می‌شوند. برای هر پسر B، یک ترتیب کلی اکید، $<_B$ بر دخترهـا و بـرای هـر دختر G یک ترتیب کلی اکید ، $<_G$، بر پسرها وجود دارد.

نظر به این است که $<_B$ ترجیح رده‌بندی پسرها بر دختران است. یعنی که $G_1 <_B G_2$ به این معنی است که B دختر $G2$ را به $G1$ ترجیح می‌دهد. بطور مشابه هـم، $<_G$ تـرجیح رده‌بنـدی G بـر پسران است.

به منظور نمونه سازی الگوریتم همسریابی بوسیله ماشین حالت یک کلید مشاهده می‌سازیم:

برای تعیین اینکه در یک روز آئینی چه اتفاقی می‌افتد، همه آنچه را باید بدانیم این است که کـدام دخترها آن روز در فهرست کدام پسرها قرار دارند. بنابراین یـک حالـت را بـه برخـی اطلاعـات ریاضی تعیین می‌کنیم تا این داده‌ها را فراهم کند. مثلاً، حالتی را تعریف کنید تا رابطـه "همچنـان، در فهرست باقی بماند" R بین پسرها و دخترها باشد. بنابراین BRG یعنـی اینکـه دختـر G از فهرست پسر B بیرون نیفتاده است.

الگوریتم همسریابی را با هیچ دختری از فهرست رانده نشده آغـاز مـی‌کنـیم. بنـابراین در حالـت شروع رابطه دو بخشی کامل وجود دارد که هر پسر را به هر دختر ربط می‌دهد. مطابق همسریابی آئینی، در هر صبحی که باشد، پسری برای آن دختری که در میان دخترهایی که از فهرست بیـرون

نگذاشته است آواز عاشقانه می‌خواند با زبان ریاضی دختری که آن پسر برایش می‌خوانـد برتـرین دختر تحت ترتیب $>_B$ در میان دختران بر فهرست مجموعه B است. (اگر فهرست خـالی باشـد، پسرک برای کسی آواز سر نمی‌دهد.)

می‌توانیم این کار را ادامه دهیم تا به تعیین فرد مورد دلخواه دختر که تحت ترتیب ارجحیت‌هایش بالاترین فرد در میان پسرانی که برایش آواز عاشقانه می‌خوانند برسیم. مشابه همین می‌توانیم پیش برویم تا انتقال‌های حالت را با دقت قواعد ریاضی مشخص کنیم، ولی دردسر نمی‌دهیم. نکته ایـن است که اگر نیاز باشـد، مـی‌تـوانیم بـا اسـتفاده از سـاختارهای اساسـی داده‌هـای ریاضـی مثـل، مجموعه‌ها، توابع و نسبت‌ها، همه چیز را مشخص کنیم، ولی اجازه بدهید در کنار همین واژه‌نامه شهودی پسرها و دخترها و ترجیحات آنها بمانیم.

٤. ٥ به پایان رساندن

فهم اینکه چرا الگوریتم همسریابی پایان می‌یابد آسان است: هر روز حداقل یک پسر یک دختر را از فهرست خود پاک می‌کند. اگر هیچ دختری از هیچ لیستی کنار گذاشته نشود، پس آئین به پایان رسیده است. در ابتدا n دختر در n لیست پسر است که به طور کلـی $n^۲$ لیسـت ورودی وجـود دارد. از آنجا که هیچ دختری به یک لیست اضافه نمی‌شود، مادامی که آئین اسـتمرار داشـته باشـد تعداد کل ورودی‌ها به فهرست هر روز کاهش می‌یابد و بنابراین آئین می‌تواند بـرای حـداکثر $n^۲$ روز استمرار بیابد.

٥. ٥ آنها از این به بعد شادمانه زندگی می‌کنند ...

همچنان باید ثابت کنیم که الگوریتم همسریابی هر یک را در ازدواج پایدار بجا مـی‌گـذارد. بـرای انجام این کار، یک حقیقت مفید درباره تشریفات داشته باشد، پس آن خواستگار مورد علاقه صبح روز بعد همچنان آواز عاشقانه برایش می‌خواند – چون که فهرست او تغییر نخواهد یافـت. بنـابر این آن دختر امروز مطمئن است که این پسر را در میان خواستگاران فردا دارد. معنی‌اش این است که دختر قادر خواهد بود فردا خواستگار محبوب خود را که حداقل به همـان مطلوبیـت محبـوب امروز است، انتخاب کند. بنابراین، روز بروز، خواستگار محبوبش می‌تواند همانطور باقی‌بمانـد یـا بهتر بشود، هرگز بدتر نمی‌شود. به سخن دیگر، محبوب یک دختر یـک متغیـر صـعودی ضـعیف است نسبت به ترتیب ارجحیت آن دختر درباره پسرها.

اینک می‌توانیم الگوریتم همسریابی را با استفاده از یک گزاره پایا ساده p مشخص کنیم. که آنچه در جریان است را در بر بگیرد:

برای هر دختر، G و برای هر پسر B، اگر G از فهرست B بیرون گذاشته شود، آنگاه G یـک خواستگار محبوب دارد و او را به B ترجیح می‌دهد.

چرا p یک پایا است؟ خوب، می‌دانیم که محبوب فردای G حداقل بـه انـدازه محبـوب امـروز مورد قبول دختر است و از آنرو که محبوب امروزش مورد قبول‌تر از B است، محبوب فردا هـم چنین خواهد بود.

توجه کنید که p همچنین در روز اول صادق است، از آنجا که هر دختری در هر لیست موجود است. بنابراین بر اساس قضیه پایایی، می‌دانیم که در هر روزی که آئین همسریابی برقرار باشد صادق است. اثبات اینکه پایا هنگامی که الگوریتم همسریابی صادق باشد پایان می‌پذیرد به ما اجازه می‌دهد برهان‌ها را کامل کنیم.

قضیه ٤. ٥ هر کسی با الگوریتم همسریابی مزدوج می‌شود.

برهان. فرض کنید، به برهان خلف، که تعدادی پسر در آخرین روز آئین همسریابی ازدواج نکرده باشند. بنابراین نمی‌تواند برای هیچ کس آواز بخواند، یعنی که، فهرست او باید خالی باشد. و لذا طبق پایای p هر دختر پسری محبوب دارد که او را به آن پسر ترجیح می‌دهد. به خصوص، هر دختر پسر محبوبی دارد که در روز آخر با او ازدواج می‌کند. به این ترتیب همه دخترها ازدواج کردند.

آنچه باقی است اینکه چند همسری در کارنیست: یک پسر تنها برای یک دختر آواز دلدادگی می‌خواند، بنابراین هیچ دو دختری همان یک محبوب را ندارند.

ولی تعداد دخترها همان اندازه است که پسرها هستند، بنابراین پسرها هم باید ازدواج کنند. $\square$

قضیه ٥. ٥ الگوریتم همسریابی، ازدواج‌های پایدار ایجاد می‌کند.

برهان. فرض کنید باب یک پسر باشد و کارول دختری که در روز آخر آئین همسریابی با او ازدواج نکرده است. ثابت خواهیم کرد که باب و کارول زوج رذل نیستند. از آنجا که باب پسری

دلبخواه بود، لذا هیچ پسری قسمتی از زوج رذل نیست. از این‌رو ازدواج‌های روز آخر پایدار هستند.

برای اثبات قضیه: دو مورد را در نظر می‌گیریم:

مورد ۱. کارول در لیست باب قرار ندارد. پس از آنجا که پایای p صادق است، می‌دانیم که کارول شوهرش را به باب ترجیح می‌دهد. بنابراین قصد ندارد به همراه باب فرار کند: قضیه در این مورد صادق است.

مورد ۲. با وجودیکه، کارول در فهرست باب قرار دارد. ولی از آنرو که باب با کارول ازدواج نکرده است، باید انتخاب کرده باشد که به جای کارول برای همسرش آواز عاشقانه خوانده باشد، بنابراین باید همسرش را ترجیح بدهد. بنابراین قصد ندارد با کارول بگریزد: قضیه در این مورد هم صادق است. □

٦. ٥ و پسرها مخصوصاً شادمانه زندگی می‌کنند

چه کسی بوسیله الگوریتم همسریابی مورد لطف قرار می‌گیرد، پسرها یا دخترها؟ به نظر می‌آید که دخترها همه قدرت را در اختیار داشته باشند: در بالکن‌هایشان می‌ایستند تا بهترین را در میان خواستگاران خود انتخاب کرده و بقیه را رد کنند. دیگر چه می‌دانیم که فقط می‌توانند همان طور که الگوریتم جلومی‌رود تغییر کرده و بهتر شوند.

به همین شکل هم، یک پسر به آواز خواندن برای دختری که بیشترین ترجیح را در فهرست برایش دارد ادامه می‌دهد تا اینکه باید او را کنار بزند، در آن نقطه‌ای که برای نفر بعدی که

ارجح‌ترین دختر در فهرست او می‌باشد آواز عاشقانه سر دهد. بنابراین از نقطه نظر پسرها، دختری که دارد برایش آواز می‌خواند فقط می‌تواند به سمت بدتر تغییر کند. انگار که معامله‌ی خوب برای دخترها باشد.

ولی این طور نیست! حقیقت این است که از لحظه آغاز آواز خوانی پسرها برای دختر انتخاب اول‌شان و مطلوب بودن دختری که برایش آواز می‌خوانند فقط به اندازه‌ای کاهش می‌یابد تا به آن پسر مطلوب‌ترین همسر ممکن را بدهد. بنابراین الگوریتم همسریابی بهترین امکان را برای همه پسرها فراهم می‌سازد و عملاً بدترین شغل ممکن را برای دختران.

برای توضیح همه این موارد به تعدادی تعریف نیازمندیم. بیائید با مشاهده این آغاز کنیم که در همان حالی که الگوریتم همسریابی یک مجموعه ازدواج‌های پایدار ایجاد می‌کند، ممکن است راه‌های دیگری هم برای ترتیب دادن ازدواج‌های پایدار در میان همان مجموعه پسرها ودخترها وجود داشته باشد. برای مثال، با معکوس کردن نقش پسرها و دخترها غالباً مجموعه‌ای متفاوت از ازدواج‌های پایدار در میانشان به بار خواهد آورد.

تعریف ٦. ٥ اگر یک مجموعه ازدواج پایدار باشد که در آن یک دختر ، G، با یک پسر B ازدواج کند، آنگاه به G همسر ممکن B می‌گویند و همینطور هم، B همسر ممکن G است.

این تعریف گویای این است که بن بیتدایدل بی کفایت هیچ شانسی برای ازدواج با ستاره موسیقی پاپ بریتنی اسپرز ندارد: بریتنی یک همسر ممکن نیست. مهم نیست که چه در هم می‌شکند،

همیشه تعدادی پسر که آنها را بیشتر از بن دوست داشته باشد وجود دارند و آنها هم او را بیشتر از همسر (یار) خود دوست دارند. هیچ وقت ازدواج بن و بریتنی نمی‌تواند پایدار بماند.

یادتان باشد از آنرو که الگوریتم همسریابی همیشه یک مجموعه ازدواج پایدار بوجود می‌آورد، مجموعه همسران ممکن– حتی بن– هرگز تهی نیست.

تعریف ۸. ۵ الگوریتم همسریابی هر پسری را با بهترین انتخاب خود جور می‌کند و هر دختری را با بدترین انتخابش.

برهان. برهان دو قسمت دارد. ابتدا، نشان می‌دهیم که هر پسری با همسر بهین خود ازدواج می‌کند. اثبات با برهان خلف انجام می‌گیرد. تصور کنید که پسری دختر بهین خود را بدست نمی‌آورد. بایستی یک روز گذشته باشد که او دختر بهین خود را پشت سر گذاشته باشد (از طرف دختر رد شده باشد) – در غیر این صورت او همچنان برایش آواز می‌خواند یا حتی برای دختری مطلوب‌تر می‌خواند.

با اصل خوش‌ترتیبی، باید اولین روز وجود داشته باشد که پسری از طرف دختر بهین خود کنار گذاشته شود.

فرض کنید B یکی از اولین پسرهایی باشد که بوسیله دختر بهین خود کنار گذاشته شود، فرض کنید G بهین دختر B باشد.

مطابق با آیین، B از طرف G کنار گذاشته می‌شود چون که آن دختر خواستگاری محبوب مانند B' دارد که او را به B ترجیح می‌دهد. بنابراین در بامداد روزی که B از G صرف نظر می‌کند

(از جانب G کنار گذاشته می‌شود) B' محبوب آن دختر هنوز همسر بهین خود را کنار نگذاشته است. معنی‌اش این است که B' باید G را بیشتر از هر همسر ممکن دیگری دوست داشته باشد. (البته، چه بسا آن دختر همسر ممکن نباشد، شاید بعداً او را ارزان بفروشد.)

از آنجا که G همسر ممکن B است، باید یک مجموعه ازدواج پایدار باشد که B با G ازدواج می‌کند و B' با کس دیگر ازدواج می‌کند. ولی B' و G در این مجموعه ازدواج یک زوج رذل هستند:

G بیش از همسر خود B، B' را دوست دارد و B' بیشتر از همسر ممکن خود که با او ازدواج کرده است G را دوست دارد. این ادعایی که مبنی بر پایداری ازدواج‌ها بود را نقض می‌کند.

حالا بپردازیم به قسمت دوم برهان: نشان دادن این موضوع که هر دختری با بدترین انتخاب خود ازدواج کرده است. باز با استفاده از برهان خلف ثابت می‌شود.

تصور کنید برای فرض (منظور) تناقض که یک مجموعه ازدواج پایای M وجود دارد و دختری مانند G وجود دارد، که در الگوریتم جفت‌یابی بدترین روزگار را می‌گذارند. فرض کنید که B همسر آن دختر در الگوریتم همسریابی باشد. با توجه به استدلال پیشین، G همسر بهین B است.فرض کنید B شوهر او در M باشد، پسری که آن دختر حتی کمتر از B دوستش دارد. پس B و G تشکیل یک زوج رذل در M می‌دهند: B، G را به همسرش ترجیح می‌دهد ،چرا که آن دختر همسر بهین اوست، و G، B را به شوهرش ترجیح می‌دهد که B' باشد، بنا به فرض. این ادعایی که می‌گفت M یک مجموعه ازدواج پایدار بود را نقض می‌کند. □