فصل پنجم

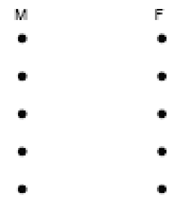
گراف‌ها

همان‌طور که در مطالب هفته چهارم متذکر شدیم منظور ما از گراف، گراف‌های بدون جهت می‌باشند.

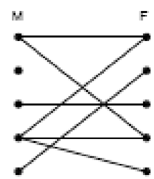
۱. شمارش بوسیله درجات:

۱-۱ سکس در آمریکا:

در یک مطالعه از دانشگاه شیکاکو به سال ۱۹۹۴ با عنوان "دسته‌بندی عمومی تمایلات جنسی" نشان داده شده که بطور میانگین مردان ۷۴٪ بیش از زنان تمایل به جنس مخالف دارند که این تأییدی است بر اینکه مردان بیشتر در امور جنسی بی‌قید هستند. اما هر کس که این مطلب را گزارش کرده دروغگو بوده یا اشتباه کرده است. ما نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از خواص درجهٔ رئوس در گرافها این موضوع را ثابت کرد. اجازه دهید تا موضوع "تمایلات به جنس مخالف" را بر حسب مفاهیم گراف بیان کنیم. فرض کنیم G یک گراف باشد که مجموعه رئوس آن V، شامل هر آمریکایی می‌باشد. حال هر رأسی یک زن یا یک مرد را نشان می‌دهد. از این‌رو می‌توان V را به دو زیر مجموعه : M، دسته‌ای که نمایندهٔ مردان هستند، و F دسته‌ای که نماینده زنان هستند، افراز نمود. بیاییم و اعضای M را در سمت چپ و اعضای F را در سمت راست رسم کنیم.



حال بدون اینکه خیلی دقت بخرج دهیم، بعضی اوقات یک یال بین یک راس از M و یک راس از F ظاهر می شود .



چون ما فقط روابط بین جنس‌های مخالف را در نظر گرفته‌ایم ، هر یال راسی از M را به راسی از F وصل می‌کند. در نتیجه مجموع درجات راسهای در M برابر مجموع درجات راسهای در F و برابر تعداد یالها می‌باشد. در نتیجه رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{x \in M} \deg(x) = \sum_{y \in W} \deg(y)$$

حال دو طرفه این رابطه را بر $|M||F|$ (سایز M در سایز F) تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\sum_{x \in M} \deg(x)}{|M|}\right) \cdot \frac{\text{۱}}{|F|} = \left(\frac{\sum_{y \in w} \deg(y)}{|F|}\right) \cdot \frac{\text{۱}}{|M|}$$

عباراتی که در بین پرانتزها قرار گرفته‌اند عبارتند از، میانگین درجات در M و میانگین درجات در F. درنتیجه رابطه بالا به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\frac{F \text{ میانگین درجات رئوسی در}}{|M|} = \frac{M \text{ میانگین درجات رئوسی در}}{|F|}$$

و لذا

$$\text{میانگین درجات رئوسی در } F . \frac{|F|}{|M|} = \text{میانگین درجات رئوسی در } M$$

به عبارت دیگر نشان دادیم که میانگین تعداد مردانی که تمایلات بـه جـنس مخـالف دارنـد قابـل مقایسه است با این تعداد در زنان و به تنهایی با داشتن نسبت تعداد مردان به تعداد زنان با داشـتن یکی از این تعداد می‌توان دیگری را معین کرد.

اما طبق گزارش اداره سرشماری، تعداد زنان کمی بیشتر از تعداد مردان است و بـه عبـارت دیگـر مقدار $\frac{|F|}{|M|}$ حدوداً برابر ۱/۰۳۵ است . در نتیجـه در مـی یـابیم کـه بطـور میـانگین ٪3.5 مـردان تمایلات جنسی بیشتری نسبت به زنان خواهند داشت که این عدد چیزی درباره تمایلات جنسـی بی‌قاعده را باز گو نمی‌کند. ما فقط می‌توانیم نسبت به گزارش محققان دانشگاه شـیکاکو کـه ٪۷۴ تفاوت را در این زمینه بیان نموده‌اند متعجب باشیم.

لم دست دادن :

در مبحث قبل ارتباطی بین مجموع درجات و تعداد یالها بیان شد. ارتباطی ساده بین این دو مفهوم در هر گرافی برقرار است.

قضیه ۱. ۱: مجموع درجات در یک گراف دو برابر تعداد یالهای آن است.

برهان: هر یال دوبار در مجموع درجات شمرده می‌شود، یکبار برای هر یک از راس‌های آن یال.

قضیه ۱. ۱: گاهی اوقات قضیه دست دادن نامیده می‌شود؛ اگر مجموع تعداد بارهایی که هر فرد در مهمانی با یکدیگر دست می‌دهند را بشماریم دو برابر تعداد بارهایی است که عمل دست دادن اتفاق افتاده است.

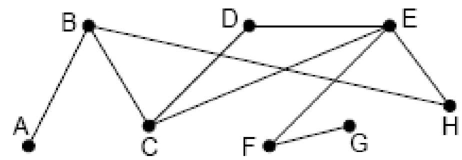
۲. همبندی:

۱. ۲ مسیرها و دورهای ساده:

مسیرها در یک گراف کاملاً مشابه مسیر در گراف‌های جهت‌دار تعریف می‌گردد. اما چون مفهوم مسیر اهمیت زیادی در مفاهیم آینده دارد تعریف آن را به دقت بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. ۲: فرض کنیم G یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یالهای E باشد. یک مسیر در G دنباله‌ای از راسهای $v_\circ, v_1, \ldots v_k$ با $k \geq 0$ است بطوری که برای هر $\circ \leq i < k$، $v_i - v_{i+1} \in E$ یالی در E باشد. مسیر را ساده گوییم اگر و فقط اگر v_i ها هر یک متفاوت باشند یعنی $v_i = v_j$ اگر و فقط اگر $i = j$.

گوییم مسیر از راس $v_\circ$ شروع و به راس v_k ختم شده و طول مسیر نیز k تعریف می شود. گوییم یال e، n بار توسط مسیر پیموده شده اگر n مقدار متفاوت؛ وجود داشته باشد که $e = v_i - v_{i+1}$. به عنوان مثال، گراف شکل ۱. ۲ دارای مسیری ساده به طول ۶ A, B, C, D, E, F, G، است.که این مسیر طولانی ترین مسیر ساده در گراف فوق می‌باشد.



یک گراف با ۳ دور ساده: تصویر ۱

قابل توجه است که طول یک مسیر عبارت است از تعداد دفعاتی که از یال‌ها عبور می‌کنیم که این عدد یکی کمتر از تعداد راسهای آن است. به عنوان مثال طول مسیر A,B,C,D,E,F,G، ۶ است که یکی از هفت رأس آن کمتر است.

دورها، مسیرهایی هستند که راس آغازین و راس خاتمه آن یکسان باشند، مشابه حالت گرافهای جهت‌دار. دور ساده، دوری است که خود را قطع نکند. به عنوان مثال، گراف شکل ۱. ۲، دارای سه دور ساده ، B,H,E,C,B و C,D,E,C و B,C,D,E,H,B است .

یک دور ساده را می‌توان توسط هر مسیری که دور آن چرخیده است بیان نمود. به عنوان مثال مسیر B,H,E,C,B، دوری را که از B و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت نموده و به B ختم می‌شود، تشریح می‌کند. در حالی که مسیر E,H,B,C,E، همان دور را شرح می‌دهند با این تفاوت که این دفعه از E شروع و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت نموده و به E ختم می‌شود.

برای دقت بیشتر، دور ساده را در یک گراف، زیر گرافی تعریف می‌کنیم که با گراف دور C_n یکریخت باشد. یک زیر گراف را می‌توان با تغییر یک گراف به زیرمجموعه‌ای از راسها و سپس احتمالاً حذف بعضی از یالها بدست آورد. بصورت رسمی تر:

تعریف ۲. ۲ یک زیر گراف G' از گراف G گرافی با مجموعه راسهای V' که زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعه رئوس گراف G است و مجموعه یالهای E' که زیرمجموعه‌ای از مجموعه یالهای Gاست تعریف می‌کنیم. توجه کنید که چون یک زیر گراف، خود یک گراف است پس دو سر هر یال آن باید راسهایی از V' باشد.

تعریف ۳. ۲: برای $n \geq ۳$ ، فرض کنیم C_n گرافی با راسهای $n,\ldots,۲,۱$ و یالهای $۱\text{-}۲,۲\text{-}۳,\ldots,(n-۱)-n,n-۱$ باشد.

یک گراف، C، یک دور ساده از طول n است اگر و فقط اگر عددی مانند $n \geq ۳$ وجود داشته باشد که C_n با C یکریخت باشد.

یک دور ساده از گراف G، زیر گرافی از G است که دور ساده باشد.

اگر دور ساده را به صورت یک مسیر حول آن تشریح کنیم، آنگاه طول C برابر تعداد یالهایی از مسیر است که مسیر از آنها عبور می‌کند که برابر با تعداد راسهای متفاوت مسیر است. به عنوان مثال، دوره‌ای که توسط مسیر B,C,D,E,H,B تشریح می‌شود دارای طول ۵ است.

۲. ۲ مولفه‌های همبندی

تعریف ٤. ۲: دو راس در یک گراف را همبند گوییم اگر مسیری در گراف وجود داشته باشد که از یکی از رأس‌ها شروع و به رأس دیگر ختم شود.

حال اگر مسیری از راس u به راس v وجود داشته باشد، سپس v توسط مسیر برگشت به u مرتبط است.

در نتیجه همبندی یک رابطه متقارن می‌باشد. همچنین اگر یک مسیر از راس u به v وجود داشته باشد و مسیری از راس v به w وجود داشته باشد با ترکیب این مسیرها، مسیری از راس u به w ایجاد می‌شود.

در نتیجه همبندی یک رابطه تعدی نیز هست. این رابطه همچنین انعکاسی نیز می‌باشد چون هر راس مرتبط به خودش توسط مسیری به طول ٠ است پس لم زیر را ثابت کردیم:

لم. رابطه همبندی یک رابطه هم ارزی روی راسهای یک گراف است.

نمودار شکل ۲. ۲، مانند شکل ۳ گراف بنظر می‌رسد، اما منظور ما نمودار یک گراف است. این گراف از ۳ قسمت همبندی تشکیل شده است که هیچ مسیری بین دو راس از قسمتهای متفاوت وجود ندارد.

شکل ۲: یک گراف با سه مولفه همبندی

تعریف ۵. ۲ یک گراف را همبند گوییم اگر هر دو راس آن مرتبط باشند

قسمتهای همبند از یک گراف را مؤلفه‌های همبندی گوییم. یک تعریف مشخص عبارت است از: یک مؤلفه همبندی عبارت است از مجموعه همه راسهایی که با یک راس مرتبط هستند. یعنی، مؤلفه‌های همبندی از یک گراف عبارتند از دسته‌های هم ارزی از رابطه هم ارزی همبند بودن.

در نتیجه یک گراف همبند است اگر و فقط اگر دارای فقط یک مؤلفه همبندی باشد. گراف خالی n راسی دارای n، مؤلفه همبندی است.

۳. ۲ میزان همبندی

اگر گراف را به عنوان مدلی از یک شبکه تلفن کابلی، یا خطوط لوله‌های نفتی، یا خطوط کابلهای الکتریکی در نظر بگیریم. نه تنها همبندی را می‌خواهیم بلکه همبندی‌هایی را که بـا از بـین رفـتن آنها، همبندی یک مؤلفه از بین می‌رود را نیز می‌خواهیم. این موضوع ما را به تعریف زیر هـدایت می‌کند.

تعریف ٦. ۲ دو راس در یک گراف را k– همبند گوییم اگر در هـر زیـر گرافـی کـه از حـذف k –۱ یال از گراف حاصل می‌شود این دو راس همبند بمانند. یک گـراف را k– همبنـد گـوییم اگر هر دو راس آن k– همبند باشند.

بنابر این ۱– همبند همان مفهوم همبندی، هم برای دو راس و هم برای یک گـراف اسـت. روش دیگری برای تعریف k همبند بودن یک گراف این است که بگوییم، هـر زیـر گـراف آن کـه بـا حذف k –۱ یال از گراف حاصل می‌شود همبند باشد.

به عنوان مثال، در گراف نمودار ۱. ۲، راسـهای E,B، ۲– همبنـد هسـتند و راسـهای E,G، ۱– همبند بود و هیچ دو راس ۳– همبندی در گراف وجود ندارد. گراف بطورکلی ۱– همبند است. به طور کلی، یک دور ساده ۲– همبند است و گراف کامل ، k_n، $(n-۱)$– همبند است. اگـر دو راس توسط k– یال مجزا با یک دیگر مرتبط باشند (یعنی هیچ دو مسیری ازیک یال عبور نکنند) آنگاه آنها به وضوح k– همبند هستند. یک حقیقت اساسی که ما از اثبات مبتکرانه آن صرفنظر می‌کنیم

قضیه مِنگر است که بیان می‌کند عکس این مطلب نیز درست است: اگر دو۲ راس k– همبند باشند آنگاه k– یال مجزا وجود دارد که این دو راس را با یکدیگر مرتبط می‌کند. این قضیه حتی برای حالت $k = ۲$ نیز اثباتی نبوغ آمیز دارد.

٤. ۲ ارتباط توسط مسیری ساده

جایی که مسیر وجود دارد مسیر ساده نیز هست. این موضوع بدیهی است اما در اثبات آن باید با دقت از اصل کوچکترین عدد استفاده نمود.

٤. ۷. ۲: اگر راس v,u در یک گراف مرتبط باشند آنگاه در گراف مسیری ساده از u به v وجود دارد.

برهان: چون مسیری از u به v وجود دارد آنگاه بنابر اصل کوچکترین عدد، مسیری از u به v با کوچکترین طول هم وجود دارد. اگر کوچکترین طول ۰ یا ۱ باشد آنگاه مسیر با این طول خود یک مسیر ساده است در غیراین صورت مسیر با کوچکترین طول را می‌توان به صورت $v_\circ \ v_1 \dots v_k$ درنظر گرفت که $v_\circ = u$، $v_k = v$ و $k \geq ۲$ ادعا می‌کنیم که این مسیر ساده است. برای اثبات ادعایمان، به برهان مختلف فرض کنیم که مسیر ساده نباشد از این‌رو راسی روی مسیر وجود دارد که دوبارتکرار شده است این بدین معنی است که اعداد j,i وجود دارد که $\circ \leq i < j \leq k$ بطوری که $v_i = v_j$. حال با حذف دنباله $v_{i+1},\dots,v_j$ از مسیر، مسیری با طول کوتاهتر از مسیر $v_\circ \dots v_k$ بین u و v حاصل می‌شود که با فرض انتخاب این مسیر در تناقض است □

در واقع مطلب قوی تری را ثابت کردیم:

نتیجه ۲.۸ برای هر مسیر از طول k در یک گراف، مسیری ساده از طول حداکثر k با همان ابتدا و انتها وجود دارد.

۲.۵ کم‌ترین تعداد یال در یک گراف همبند

قضیه زیر بیان می کند که یک گراف با تعداد یال کم باید دارای تعداد زیادی مؤلفه همبندی باشد. جالب است بیان کنیم که در این حالت باید گراف کمتر از تعداد راسهایش یال داشته باشد.

قضیه ۲.۹ هر گراف با k راس و n یال حداقل $k-n$ مؤلفه همبندی دارد.

برهان: اثبات به استقراء روی تعداد یالهای گراف انجام می‌گیرد. فرض کنیم $P(n)$ گزاره زیر باشد.

برای هر k، هر گراف با k راس و n یال دارای حداقل $k-n$ مؤلفه همبندی است.

ابتدای استقراء: در یک گراف با ۰ یال و k راس، هر راسی به تنهایی یک مؤلفه همبندی بوده و درنتیجه دقیقاً $k = k - 0$ مؤلفه همبندی دارد.

فرض استقراء: حال فرض کنیم برای هر گراف n یالی برقرار است ثابت می‌کنیم برای هر گراف $n+1$ یالی نیز حکم برقرار است.

فرض کنیم G یک گراف $(n+1)$- یالی و k راسی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم G حداقل $k-(n+1)$ مؤلفه همبندی دارد.

برای اثبات این موضوع یالی دلخواه $u-v$ را از گراف G حذف کـرده و گـراف حاصـل را G' بنامیم. طبق فرض استقراء G' دارای حداقل $k-n$ مؤلفه همبندی است.حال یال uv را بـه G' برمی‌گردانیم تا گراف G حاصـل شـود. اگـر u,v در یـک مؤلفـه همبنـدی از G' باشـد آنگـاه مؤلفه‌های همبندی G',G یکسان است و درنتیجه G دارای حداقل $k-n > k-(n+1)$ مؤلفـه همبندی است. اگر v,u در دو مؤلفه همبندی متفاوت از G' قرار داشته باشند با اضافه کردن این یال، این دو مؤلفه در G به یک مؤلفه تبدیل شده وبقیه مؤلفه‌های G' در G تغییری نمـی‌کننـد. در نتیجه تعداد مؤلفه‌های G یکی از تعداد مؤلفه‌های G' کمتر می‌شـود پـس G دارای حـداقل $(k-n)-1=k-(n+1)$ مؤلفه همبندی خواهد. □

قضیه زیر توسط استقراء حاصل می شود

نتیجه ۱۰. ۲: هر گراف همبند n راسی حداقل $n-1$ یال دارد.

بی ارزش نیست که دو نکته درباره اثبات قضیه ۹. ۲ بیان کنیم. اول اینکه، اسـتقراء را روی تعـداد یالهای گراف بیان نمودیم و با خارج کردن یک یال توانستیم از فرض استفاده کنیم و مجدد یال را به گراف برگردانیم این روشی را که روش "کوچک کردن" و "بزرگ کـردن" اسـت را بصـورت کاملاً معمول در اثباتهای مباحث نظریه گراف استفاده می‌کنند. ممکن اسـت بنظـر برسـد کـه ایـن تلاش نیاز نباشد و چرا با یک گراف n یالی شروع بکنیم و فقط یک یـال بـه آن اضـافه کـرد. و گراف $(n+1)-$ یالی بدست آوریم.

این ممکن است در این حالت خوب باشد اما درها را باز کرده و ایرادهـای منطقـی ایـن راه را در مباحث مشابه ببینید. مثالی از این را در کلاس خواهید دید. همواره از روش "کوچـک کـردن" و سپس "بزرگ کردن" استفاده کنید و هیچ‌گاه خود را در نکته بالا قرار ندهید.

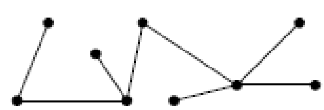
۳. درختها

درختها یکی از روشهای اصلی ساختار دادن به اطلاعات در نظریه علوم کامپیوترمی‌باشند و دارای انواع مختلفی مانند، ریشه دار، مرتب یا درختهـای دودویـی هسـتند. در ایـن بخـش روی حالـت درختها تمرکز داریم. به این معنی که، منظور از درخت، گراف همبند بدون دور ساده است.

یک گراف بدون دور ساده را "بدون دور" نامیده و از این‌رو درختها گرافهـای بـدون دور همبنـد هستند.

خواص درختها

در زیر مثال از یک درخت را می‌بینید.



یک راس از درجه ۱ را برگ می‌نامیم. در مثال فوق، پنج برگ وجود دارد.

گراف بالا درخت باقی نمی‌ماند اگر یکی از یالهای آنها را حذف کنـیم، زیـرا همبنـدی آن از بـین می‌رود همچنین گراف بالا درخت باقی نمی‌ماند اگر یک یال بین دو راس آن اضافه کنیم زیـرا در این حالت دارای دور ساده خواهد شد. بعلاوه توجه کنید که بـین هـر دو راس آن مسـیری یکتـا وجود دارد. این خصوصیات برای این مثال در واقع برای همه درختها مشترک است.

قضیه ۱. ۳ هر درخت دارای خواص زیر است.

۱- هر زیر گراف همبند از یک درخت، خود درخت است.

۲- بین هر دو راس یک مسیر ساده یکتا وجود دارد.

۳- با اضافه کردن یک یال بین هر دو راس، دور ایجاد می‌شود.

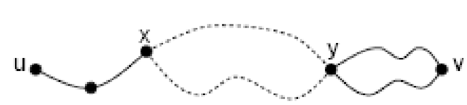
٤- حذف هر یال باعث ناهمبندی گراف می‌شود.

۵- اگر حداقل دو راس داشته باشد، آنگاه حداقل دو برگ دارد.

٦- تعداد راسها یکی بیشتر از تعداد یالها است.

برهان: ۱) یک دور ساده در یک زیر گراف، یک دور ساده در گراف نیز است بنابر این هر زیر گراف از یک گراف بدون دور، بدون دور است. اگر زیر گراف همچنین همبند هم باشد طبق تعریف یک درخت است.

۲) حداقل یک مسیر وجود دارد، سپس یک مسیر ساده بین هر دو راس وجود دارد چرا که گراف همبند است. فرض کنیم که بین دو راس v,u با توجه به همبندی، دو مسیر ساده متفاوت وجود داشته باشد. با شروع از u، فرض کنیم x اولین راس مشترک و y راس مشترک بعدی این در مسیر باشد در نتیجه بین y,x دو مسیر ساده که یال مشترک ندارند وجود دارد که این دو مسیر یک دور ساده تولید کرده و تناقضی حاصل می‌شود زیرا درخت ها بدون دور هستند. پس بین هر دو راس دقیقاً یک مسیر ساده وجود دارد.



٣) یال اضافی $u-v$ به همراه مسیر یکتای بین v,u یک دور ساده ایجاد می‌کند.

٤) فرض کنیم یال $u-v$ را حذف کرده باشیم. چون درخت شامل یک مسیر ساده یکتا بین v,u است پس این مسیر همان مسیر $u-v$ است. در نتیجه با حذف این یال هیچ مسیری بین v,u وجود نداشته و گراف ناهمبند می‌شود.

٥) فرض کنیم $v_1,v_2\ldots v_m$ راسهای طولانی ترین مسیر در درخت باشند. آنگاه $m\geq 2$ زیرا یک درخت با دو راس حداقل یک یال دارد. هیچ یالی به صورت v_1-v_i، $2<i\leq m$ وجود ندارد زیرا در غیراینصورت $v_1\ldots v_i$ یک دور ساده ایجاد می‌کند. همچنین هیچ یالی به صورت $u-v$ که u در مسیر نباشد وجود ندارد زیرا در غیراینصورت مسیر طولانی‌تری پیدا می‌کنیم پس تنها راسی که به v_1 می‌تواند وصل باشد v_2 است یعنی v_1 یک برگ است. مشابه حالت بالا، v_m نیز دومین برگ است.

٦) از استقراء روی تعداد راسها استفاده می‌کنیم. برای یک درخت یک راسی، ادعا درست است زیرا یالی ندارد و $1=1+0$.

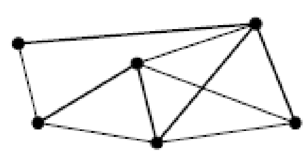
حال فرض کنیم که ادعا برای هر درخت n راسی درست بوده و T درختی $n+1$ راسی باشد. فرض کنیم v برگی از درخت است. ابتدا اثبات این مسئله که حذف راس درجه ١ (و حذف یال مربوطه) از یک گراف همبند زیرگرافی همبند ایجاد می‌کند به خواننده واگذار می‌کنیم. حال با استفاده از (١) و حذف V و یال مربوط به آن به درختی کوچکتر می‌رسیم درخت کوچکتر طبق استقراء یک راس بیشتر از تعداد یالهایش دارد. اگر مجدداً راس V را و یال متناظر را برگردانیم

رابطه بین تعداد راسها و یالها در گراف حاصل برابر است زیرا هم تعداد راسها و هم تعداد یالها به اندازه یک واحد افزایش پیدا کرده‌اند پس قضیه برای T برقـرار اسـت و بـا اسـتقراء بـرای تمـام درختها برقرار می‌شود. □

زیر مجموعه‌های متفاوت از این خواص، رده بندی‌های مختلفی از درختها را فراهم می‌نماید .کـه ما به اثبات آنها نمی‌پردازیم. به عنوان مثال، یک گراف همبند با تعداد راسهای یکی بیشتر از تعداد یالهایش لزوماً درخت است. همچنین یک گراف که بین هر دو راس آن مسیری یکتا وجود داشـته باشد نیز لزوماً درخت است.

درختهای فراگیر:

درختها همه جا هستند. در حقیقت، هر گراف همبند شامل یک زیر گراف است که این زیر گراف درختی شامل همه رئوس گراف است. این زیر گراف را، یک درخت فراگیر از گراف می‌نامند بـه عنوان مثال، در زیر، گرافی همبند رسم شده که یک زیر درخـت فراگیـر آن بـه صـورت پررنـگ نمایان داده شده است.



قضیه ۲. ۳ هر گراف همبند شامل یک زیر درخت فراگیر است.

برهان: فرض کنیم T زیرگرافی همبند با کمترین تعداد یال از گراف G باشد. به روش برهان خلف نشان می‌دهیم که T یک گراف بدون دور است. فرض کنیم T دارای دوری با یالهای زیر باشد.

$$v_0 - v_1, v_1 - v_2, \ldots v_n - v_0$$

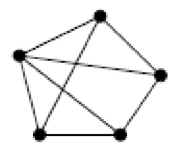
فرض کنیم یال $v_n - v_0$ را حذف کنیم. اگر دو راس y, x توسط مسیری که شامل یال $v_n - v_0$ نباشد به یکدیگر مرتبط باشند باز توسط باقیمانده مسیر به هم مرتبط خواهند بود. اگر y, x توسط مسیری که شامل یال $v_n - v_0$ است مرتبط باشند آنگاه این دو راس توسط مسیری که شامل یالهای باقیمانده دور هستند با یکدیگر مرتبط می‌شوند. اما این موضوع تناقض است زیرا T کوچکترین زیر گراف همبند G از نظر تعداد یال بوده است پس T بدون دور است. □

٤. رنگ آمیزی گرافها

در هر ترم، دفتر برنامه ریزی MIT باید بازه زمانی ای را برای هر یک از امتحانات پایانی دروس مشخص کنند. این موضوع ساده‌ای نیست زیرا بعضی از دانشجویان چندین درسی را که دارای امتحان پایانی هستند در یک ترم داشته و یک دانشجو نمی‌تواند در یک بازه زمانی بیش از یک امتحان داشته باشد.

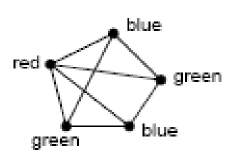
دفتر برنامه‌ریزی می‌خواهد از تمام این تضادها جلوگیری کند ولی امتحانات را هم در کوتاه‌ترین زمان ممکن برگزار نماید ما می‌توانیم این مسئله زمان‌بندی را به مسأله‌ای بر حسب رنگ آمیزی راس‌های گرافها تبدیل کنیم. برای هر درسی با امتحان پایانی یک راس در نظر بگیرید یک یال بین

دو راس قرار دهید اگر دانشجویانی باشند که این دو درس را داشته باشند. به عنوان مثـال، گـراف زمان‌بندی می‌تواند به شکل زیر بنظر برسد.



حال هر بازه زمان را متناظر یک رنگ در نظر بگیرید. به عنوان مثال، صبح دوشنبه را قرمـز، عصـر دوشنبه را آبی، صبح سه شنبه راسبز و غیره.

تخصیص یک امتحان به یـک بـازه زمـانی معـادل رنـگ آمیـزی راس متنـاظر آن امتحـان اسـت. محدودیت اصلی این است که راسهای مجاور باید رنگهای متفاوت بگیرند و در غیر ایـن‌صـورت بعضی از دانشجویان در یک بازه زمانی دارای حداقل دو امتحان مـی‌باشـند. بعـلاوه، از آنجـا کـه می‌خواهیم زمان امتحانات را تا حد ممکن کوتاه کنیم، باید سعی کنـیم تـا راس‌هـا را بـا کمتـرین تعداد رنگ ممکن، رنگ آمیزی کنیم. برای گراف مثال زده شده سه رنگ کافی است.



این رنگ آمیزی بیان می‌کند که یک امتحان در صبح دوشنبه (قرمز)، دو امتحان در عصـر دوشـنبه (آبی) و دو امتحان در صبح سه شنبه (سبز) برگزار شود.

۱. ٤ k– رنگ آمیزی.

بسیاری از مسائل مربوط به تخصیص منابع به مسئله رنگ آمیزی تبدیل می‌شوند. به طور کلی یک گراف را k– رنگ‌پذیر گویند اگر به هر راس بتوان یکی از k رنگ را اختصاص داد بطوری که راس‌های مجاور رنگ متفاوت داشته باشند. کوچکترین تعداد رنگ لازم را عدد رنگـی گـراف G می‌نامند. محاسبه عدد رنگی یک گراف بطور کلی مسئله پیچیده‌ای است. اما قضیه زیر کران بالایی برای آن ارائه می‌دهد.

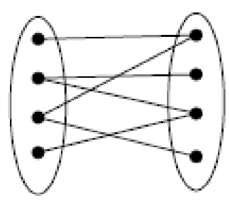
قضیه ۱. ٤: یک گراف با ماکسیم درجه k، $(k+۱)$–، رنگ‌پذیر است.

اثبات: از استقراء روی تعداد راس‌های گراف که آن را با n نمایش می‌دهیم استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $P(n)$ گزاره این باشد که، یک گـراف n راسـی بـا ماکسـیمم درجـه k، $(k+۱)$– رنگ‌پذیر باشد. یک گراف یک راسی دارای ماکسیم درجه ۰ اسـت و ۱– رنـگ‌پـذیر اسـت پـس $P(۱)$ برقرار است.فرض کنیم $P(n)$ درست بوده و G گرافی $(n+۱)$– راسی با ماکسیم درجـه k باشد. راس V و یالهای مجاور با آن را از G حذف می‌کنیم. گـراف n راسـی G' حاصـل می‌شود. ماکسـیم درجـه در G' حـداکثر k اسـت پـس طبـق فـرض اسـتقراء ، G'، $(k+۱)$– رنگ‌پذیر است. حال راس v و یالهای مجاور با آن را بر می‌گردانیم. می‌توانیم رنگـی بـه راس v تخصیص دهیم که با رنگ تمام راسهای مجاورش متفاوت باشد زیرا v دارای حداکثر درجـه k است و $k+۱$ رنگ در اختیار داریم. پس G، $(k+۱)$– رنگ‌پذیر بوده و قضیه با استقراء حاصـل می‌شود. □

۲. ٤ گرافهای دو بخشی

گرافهای ۲- رنگ‌پذیر به اندازه کافی مهم هستند تا نام بخصوصی برای آنها قائل شویم. این گرافها دو بخشی نامیده می‌شوند. فرض کنیم G گرافی دو بخشی باشد. این بـدین معنـی اسـت کـه مـا می‌توانیم راسهای گراف را با دو رنگ سفید و سیاه رنگ کنیم طوری کـه راسـهای مجـاور رنـگ متفاوت داشته باشند. حال می‌توان تمام راسهای سیاه را در سمت چپ و تمام راسهای سفید را در سمت راست قرار دهیم. چون هر یال راسهایی با رنگ متمایز را به یکدیگر مرتبط می‌کند هر یـال باید بین دو سمت قرار گیرد. پس هر گراف دو بخشی به شکل زیر بنظر می‌رسد.

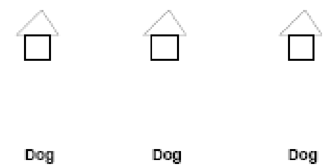


گرافهای دو بخشی هم مفید و هم متداول هستند. برای مثال ، هر مسیر، هر درخت و هـر دور بـا طول زوج دو بخشی است. به بیان دیگر، در حقیقت هر گرافی که دارای دور بطول فرد نباشـد دو بخشی است و بالعکس.

قضیه ۲. ٤ گراف دو بخشی است اگر و فقط اگر دور با طول فرد نداشته باشد.

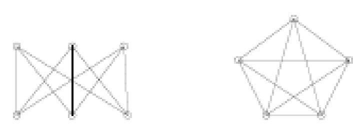
۵. گرافهای مسطح

در اینجا سه سگ و سه خانه وجود دارد



آیا می‌توان مسیری از هر سگ به هر خانه یافت بطوری که هیچ دو مسیری اشتراک نداشته باشند، حیوانی کوچک مشابه با اختاپوس با ٤ دست است در اینجا *quadapus* در کف دریا قرار دارنـد. آیا هر *quadapus* می‌تواند با دیگران دست دهد بطوری که دستها یکدیگر را قطع نکنند.

بطور غیر رسمی، یک گراف مسطح، گرافی است که بتوان آن را درصفحه طـوری رسـم کـرد کـه یالهای آن یکدیگر را قطع نکنند. بنابراین، در مسئله مطرح شده بیان می‌کند که آیـا گرافهـای زیـر مسطح هستند؟ یعنی آیا می‌توان آنها را به گونه‌ای رسم نمود که یالهایشان یکدیگر را قطع نکنند.



در هر حالت جواب تقریباً منفی است. به عبارت دیگر در هر دو حالت می‌توان رسم را انجـام داد اگر از هر کدام یالی برداشته شود.

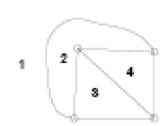
گراف‌های مسطح کاربردهایی در طراحی دایره‌ای داشته و در نمایش گرافی اطلاعات مفیـد اسـت برای مثال، در نمودار برنامه‌ها، نمودار سازمانها و در ناسازگاری زمانبندی های مفید هستند. از آنها

استفاده می‌کنیم تا یک قضیه ریاضی شگفت‌انگیز را که توسط یونانیهای باستان اثبات شده، ثابت کنیم.

۱. ۵ فرمول ایلر (اویلر)

یک گراف مسطح است اگر دارای یک نمایش مسطح (یا رسم) باشد. برای این منظور به هر راسی یک قطعه جدا در صفحه اختصاص داده و به هر یال یک خمِ هموار، که خود را قطع نمی‌کند بین دو سر آن یال اختصاص می‌دهیم. هیچ‌کدام از خمها همدیگر را قطع نمی‌کنند مگر در تنها راس مشترک یالهای متناظرشان که در هر دو خم ظاهر می‌شود.

این تعریف ما را به یک مسئله تئوری متناظر با گرافهای مسطح هدایت می‌کند: اگر چه موضوع ذاتاً ساده بنظر می‌رسد، مبحث مربوط به گرافهای مسطح باید با بحث درباره نواحی کراندار که توسط خمهای هموار در صفحه بوجود می‌آیند شروع شود. ما این موضوع را به راحتی با فرض بعضی از خواص ذاتی گرافهای مسطح دور می‌زنیم. برای شروع، فرض می‌کنیم که یک نمایش، گراف مسطح صفحه را به وجه‌هایی تقسیم می‌کند که این وجه‌ها نواحی همبندی هستند که توسط یالهای گراف احاطه می‌شوند. به عنوان مثال، نمودار زیر دارای چهار وجه است.



وجه[1]، که تا بی‌نهایت در هر جهتی گسترش می باید را وجه خارجی مـی‌نامنـد. توجـه کنیـد کـه یالهایی که در یک دور در گراف مسطح هستند مرز بین دو وجه می باشند.

این نتیجه می‌دهد که تعداد راسها و یالها در یک گراف همبند مسطح، تعداد وجه‌ها را در هر نـوع کشیدن آن گراف مشخص می‌کند.

قضیه ۱. ۵ (فرمول ایلر) برای هر کشیدن یک گراف مسطح همبند داریم: $v-e+f=۲$

که در آن v تعداد راسها، e تعداد یالها، f تعداد وجه‌ها است.

برای مثال در نمودار ترسیم شده بالا، $|v|=4\cdots$,$|E|=۶$ و $f=۴$ و همانطور کـه فرمـول ایلـر ادعا کرد. داریم ۴-۶+۴=۲.

برهان: از استقراء روی تعداد یالهای گراف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $P(n)$ این گزاره باشد که برای هر ترسیم از گراف G با e یال داشته باشیم $V-e+f=۲$.

پایه استقراء: یک گراف همبند با ۰ یال دارای ۱ راس و در هر نوع کشیدن آن $f=۱$ وجه (وجـه خارجی) است پس $v-e+f=۱-۰+۱=۲$ و $P(۰)$ برقرار است.

فرض استقراء: حال فرض کنیم $P(e)$ برقرارباشد می‌خواهیم $P(e+۱)$ را برای $e\geq ۰$ ثابت کنیم یک گراف همبند $e+۱$ یال G را در نظر بگیرید. دو حالت وجود دارد:

[1]. یک راه برای رهایی از این فرضیات در پیوست تشریح شده است

۱) اگر G بدون دور باشد، G درخت است بنابراین $e+۲$ راس وجود داشته و در هر نوع ترسیم آن فقط یک وجه خارجی وجود دارد. چون $P(e+۱)=(e+۲)-(e+۱)+۱=۲-۱+۱=۲$ درست است.

۲) در غیراین‌صورت، G دارای حداقل یک دور است. یک درخت فراگیر و یک یال $u-v$ در یک دور که در درخت نیست را انتخاب کنید (درخت فراگیر نمی تواند تمام یالهای یک دور را شامل شود زیرا درخت بدون دور است). حذف یال $u-v$ دو وجه دو طرف این یال را یکی می‌کند و گراف G' با e یال و همان تعداد راس f,v وجه بوجود می‌آورد. G' همبند است زیرا بین هر دو راس آن یک مسیر در درخت فراگیر وجود دارد. در نتیجه با توجه به فرض استقراء، $P(e)$ داریم $v-e+f=۲$. از آنجا که گراف که G دارای v راس، $e+۱$ یال و $f+۱$ وجه است و $v-(e+۱)+(f+۱)= \quad v-e+f=۲$ پس $P(e+۱)$ نیز برقرار است. و در نتیجه قضیه توسط استقراء ثابت می‌شود. □

در این بحث، ما الزاماً دو حکم هندسی را فرض کردیم: رسم یک درخت فقط یک وجه ایجاد می‌کند، حذف یک یال در یک دور دو وجه را یکی می‌کند.

۲. ۵ تعداد یالها در مقابل تعداد راسها

لــم ۲. ۵ فـرض کنـیم یـک گـراف مسـطح همبنـد دارای $v > ۲$ راس و e یـال باشـد آنگـاه

$e \leq 3v - 6$

اثبات: فرض کنیم نمودار گراف در صفحه f وجه ایجاد کند. از هر یال دقیقاً دوبار توسط دوری که یک وجه را محدود می‌کند می‌گذریم: (همانطور که در مسائل اثبـات شـده در کـلاس دیـدیم) درنتیجه مجموع طول دورهای محدود کننده هر وجه دقیقاً $۲e$ است. همچنین وقتی $v > ۲$ است. مرز هر وجه حداقل از ۳ یال می‌گذرد در نتیجه این مجموع حداقل $۳f$ است. پس داریم

$$۲e \geq ۳f \quad (۱)$$

اما بنا بر فرمول اویلر، $f = e - v + ۲$ و یا جایگزاری فرمول (۱) خواهیم داشت.

$$۲e \geq ۳(e - v + ۲)$$

$$۰ \geq e - ۳v + ۶$$

$$۳v - ۶ \geq e$$

و اثبات تمام می‌شود. □

فرمول ایلربه ما این امکان را می‌دهد که ثابت کنیم *quadapi*ها، نمی‌توانند با یکدیگر دست دهند بدون اینکه دستها یکدیگر را قطع کنند. هـر *quadapi* را توسـط یـک راس و دسـت دادن هـا را توسط یال نمایش دهید گراف کامل $k_۵$ حاصل می‌شود. دست دادن بدون قطع کردن دستها به این

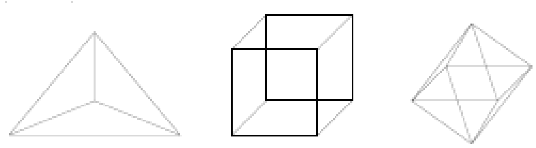
معنی است که k_5 را بتوان در صفحه رسم کرد. اما k_5 گرافی همبند ۵ راسی و ۱۰ یالی است و ۱۰ > ۳×۵-۶، شرط لم ۲. ۵ که شرط لازم برای مسطح بودن است را نقص می‌کند.

۳. ۵ دسته‌بندی چند وجهی‌ها

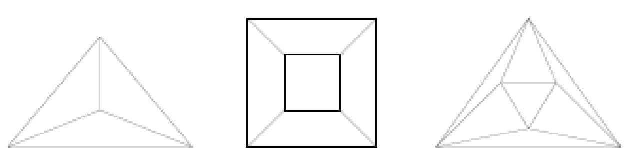
پیروین فلسفه فیثاغورث دو راز بزرگ ریاضی را به همراه داشتند ناگویا بودن ۲ و یک روش ساخت هندسی که ما می‌خواهیم آن را دوباره کشف کنیم!

یک چند وجهی، یک ناحیه سه بعدی محدب کراندار با تعداد متناهی وجه چندتایی است. اگر وجه‌ها، همگی یکسان و منظم باشند و تعداد یکسانی وجه در هر گوشه یکدیگر را قطع کند، چند وجهی را منظم گویند.

سه مثال از چند وجهی‌های منظم در زیر نشان داده شده است، سه وجهی، مکعب و هشت وجهی.



چند، چند وجهی دیگر وجود دارد؟ تصور کنید که چشمان را خیلی نزدیک به یکی از وجه‌های یک چند وجهی *translucent* کرده‌اید. یالهای آن وجه دید شما را احاطه کرده و تمام یالهای دیگر قابل رویت هستند. برای مثال، سه چند وجهی بالا به صورت زیر دیده می‌شوند.



بنابراین، ما می‌توانیم گوشه‌ها و یالهای این چند وجهی‌ها را به عنوان راسها و یالهای یک گراف مسطح در نظر بگیریم (این یک پرسش منطقی دیگر براساس شهود هندسی است). این به این معنی است که فرمول ایلر برای گرافهای مسطح می‌تواند ما را برای پیدا کردن چند وجهی‌های منظم راهنمایی کند.

فرض کنیم m تعداد وجه‌هایی باشد که در هر گوشه از یک چند وجهی یکدیگر را ملاقات می کنند و n تعداد پهلوهای هر وجه باشد. در گراف مسطح متناظر، هر راس v با m یال مجاور است. چون هر یال نیز با دو راس مجاور است پس $mv = ۲e$ از طرفی مرز هر وجه n یال دارد و چون هر یال نیز مرز دو وجه است پس $nf = ۲e$.

با حل f ,v در این معادلات وجایگزاری آن در فرمول ایلر داریم

$$\frac{۲e}{m} - e + \frac{۲e}{n} = ۲$$

$$\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} = \frac{۱}{e} + \frac{۱}{۲}$$

معادله بدست آمده شرط بسیارقوی روی ساختار چند وجهی‌های منظم قرار می‌دهد. چند وجهی‌های باقیمانده دارای حداقل ۳ طرف هستند پس $n \geq ۳$ و حداقل ۳ چند وجهی در هر گوشه باید یکدیگر را ملاقات کنند. از این‌رو $m \geq ۳$. از طرف دیگر اگر n یا m بزرگتر از ۶ باشند سمت چپ معادله بالا حداکثر $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲}$ می‌شود که از سمت راست کوچکتر می‌شود. با بررسی حالات متناهی باقیمانده ۵ جواب ممکن برای معادله بالا خواهیم داشت برای هر n و m

مجاز، می‌توان تعداد راسها، v، یالها، e و وجه‌ها، f را محاسبه کرد. تمام چند وجه‌های منظم با این اعداد بدست آمده واقعاً وجود دارند.

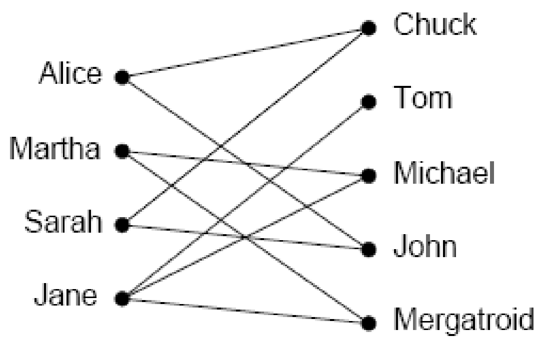
چند وجهی‌ها	f	e	v	m	n
سه وجهی	۴	۶	۴	۳	۳
مکعب	۶	۱۲	۸	۳	۴
هشت‌وجهی	۸	۱۲	۶	۴	۳
بیست‌وجهی	۲۰	۳۰	۱۲	۵	۳
دوازده وجهی	۱۲	۳۰	۲۰	۳	۵

آخرین چند وجهی در لیست، یعنی، دوازده وجهی، یکی دیگر از رازهای ریاضی دانان بزرگ فلسفه فیثاغورث می‌باشد.

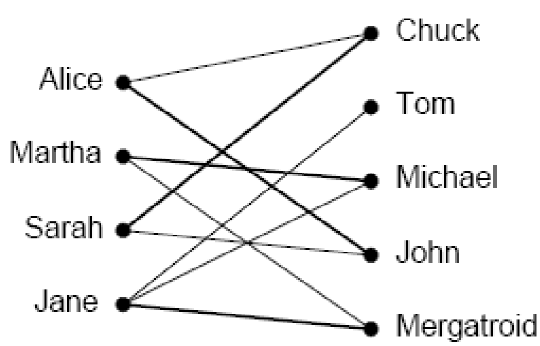
٦. قضیه ازدواج هال.

یک کلاس شامل تعدادی دختر و تعدادی پسر است. هر دختر بعضی از پسرها را دوست دارد و بقیه را دوست ندارد. تحت چه شرطی هر دختر می‌تواند با یکی از پسرهایی که او را دوست دارد ازدواج کند؟

ما می‌توانیم این موقعیت را با یک گراف دو بخشی مدل کنیم. برای هر دختر در سمت چپ یک راس و برای هر پسر در سمت راست یک راس در نظر بگیرید. اگر یک دختر با یک پسر آشنا است یک یال بین راسهای متناظر آنها قرار دهید. برای مثال ممکن است گراف زیر را داشته باشیم.



برحسب بیان دیگر، هدف یافتن یک مکمل برای دختران است، یعنی، یک زیرمجموعه از یالها بطوری هر یال دقیقاً با یکی از دخترها مجاور باشد و هر پسر حداکثر با یک یال مجاور باشد (اگر تعداد پسران از دختران نیز بیشتر باشد بعضی از پسران با هیچ دختری جفت نشده و این بدین معنی است که هیچ یالی با آنها مجاور نیست) برای مثال، یک تکامل ممکن برای دختران عبارت است از



قضیه ازدواج هال شرطی لازم و کافی برای وجود یک تطابق را در یک گراف دو بخشی بیان می‌کند. که این قضیه یکی از ابزارهای مفید ریاضی تبدیل شده است.

ما این قضیه را بر حسب مسأله دختر آشنا با یک پسر بیان واثبات می‌کنیم. تعریف می‌کنیم، مجموعه پسران آشنا با یک زیر مجموعه از دختران داده شده عبارت است از مجموعه تمام

پسرانی که با حداقل یکی از دختران آن مجموعه آشنا هستند. برای مثال ، مجموعه پسران آشنا با مارتا و جین عبارتند از تام، مایکل و مرگاروید.

برای اینکه شانس این را داشته باشیم که یک تطابقی برای دختران وجود داشته باشد باید شرط ازدواج زیر برقرار باشد.

هر زیر مجموعه از دختران باید با مجموعه‌ای از پسران که به بزرگی خودش است آشنا باشد.

برای مثال، ما نمی‌توانیم تطابقی پیدا کنیم اگر ۴ دختر فقط با ۳ پسر آشنا باشند. قضیه هال بیان می‌کند که این شرط لازم، در واقع شرط کافی نیز است و اگر شرط ازدواج برقرار باشد سپس یک تطابق وجود دارد.

قضیه ۱. ٦ یک تطابق برای یک مجموعه از دختران G با یک مجموعه از پسران B می‌توان پیدا کرد اگر و فقط اگر شرط ازدواج برقرار باشد.

برهان: ابتدا، فرض کنیم یک تطابق وجود داشته باشد نشان می‌دهیم شرط ازدواج برقرار است. یک زیر مجموعه دلخواه از دختران را در نظر بگیرید. هر دختر با پسری که با او زوج شده است آشنا است. از این‌رو، هر زیر مجموعه از دختران با یک مجموعه از پسران به بزرگی خودش آشنا است . بنابراین شرط ازدواج برقرار است.

حال فرض کنیم که شرط ازدواج برقرار باشد نشان می‌دهیم که یک تطابق وجود دارد. از استقراء قوی روی $|G|$، تعداد دختران استفاده می‌کنیم. اگر $|G|=۱$، شرط ازدواج ایجاب می‌کند که این

دختر با حداقل یک پسر آشنا است و در نتیجه یک تطابق وجود دارد. پس فـرض کنـیم $|G| \geq ۲$.

دو حالت ممکن است رخ دهد:

۱) هر زیر مجموعه محض از دختران با یک زیر مجموعه بزرگتری از پسران آشنا باشـد. در ایـن حالت یکی از دختران را به دلخواه انتخاب و با یکی از پسرانی که با او آشنا است جفت می‌کنـیم و هر دو را کنار می‌گذاریم. شرط ازدواج هنوز برای پسران و دختران باقیمانـده برقـرار اسـت. در نتیجه با استقراء می‌توان بقیه دختران را با پسران جفت کرد.

۲) فرض کنیم زیر مجموعه محض از دختران مانند $X \subset G$ با یـک زیـر مجموعـه‌ای از پسـران مانند $Y \subset B$ با همان سایز آشنا باشد. ما دختـران و پسـران را در X, Y طبـق فـرض اسـتقراء می‌توانیم با یکدیگر جفت کنیم و آنها را کنار می‌گذاریم. نشان می‌دهیم شرط ازدواج برای دختران و پسران باقیمانده هنوز برقرار است و در نتیجه می‌توان دختران باقیمانده را طبق فرض استقراء بـا پسران جفت کنیم.

برای این منظور، زیر مجموعه دلخـواهی از دختـران باقیمانـده $X' \subset G - X$ در نظـر بگیریـد و فرض کنید Y' زیر مجموعه‌ای از پسران باقیمانده باشد که با X' آشنا هستند. باید نشـان دهـیم $|X'| \leq |Y'|$ از ابتدا می‌دانیم که مجموعه دختـران $X' \cup X$ بـا مجموعـه پسـران $Y' \cup Y$ آشـنا هستند. با توجه به شرط ازدواج می‌دانیم $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$

می‌توانیم $|X|$ دختر از مجموعه سمت چپ (که X' باقی می‌ماند) و همان تعداد پسر از مجموعه سمت راست (Y' باقی می‌ماند) را کنار می‌گذاریم. از این‌رو بایـد داشـته باشـیم $|X'| \leq |Y'|$ کـه

ادعا کرده بودیم. در هر دو حالت، یک تطابقی از دختران یافت می‌شود. قضیه با استقراء ثابت می‌شود. □

برهان این قضیه یک الگوریتم برای پیدا کردن یک تطابق در یک گراف دو بخشی ارائه می‌دهد که البته خیلی کارا نیست. در هر حال یک الگوریتم کارا برای یافتن تطابق در گرافهای دو بخشی وجود دارد.

بنابراین اگر یک مسئله را بتوان به مسئله یافتن تطابق تحدید کرد، مسئله را می‌توان لزوماً با همان پیچیدگی حل نمود.

۱. ٦ یک بیان رسمی.

اجازه دهید قضیه هال را با زبان مجردتری بیان کنیم در نتیجه شما همیشه نمی‌خواهد بگویید. "حال این گروه از دختران با حداقل همان تعداد از پسران آشنا است" . فرض کنید S مجموعه راسهای یک گراف باشد. $N(S)$ را مجموعه تمام همسایه‌های S تعریف می‌کنیم، یعنی تمام راسهایی که با بعضی از راسهای S مجاور هستند ولی در S واقع نمی‌شوند.

قضیه ۲. ٦ (قضیه هال) فرض کنیم G گرافی باشد بطوری که مجموعه راسهای آن را بتوان به دو مجموعه R,L افراز کرد بطوری که هر یال یک سر در L و یک سر در R داشته باشد. یک تطابق برای راسهای L وجود دارد اگر و فقط اگر برای هر زیر مجموعه S از L داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$.