کد درس: ۱۸/۰۶۲J و ۶/۰۴۲J مقطع آموزشی: کارشناسی	بسمه تعالی عنوان درس: **ریاضیات** **برای علوم کامپیوتر**	دوره‌های آزاد رایانه‌ای SBU-MIT OCW Joint Project
استاد مدرس MIT: پروفسور آلبرت مِیر و پروفسور رونیت روبینفلد استاد مترجم SBU: دکتر چنگیز اصلاح‌چی		معاونت فناوری اطلاعات وارتباطات پروژه مشترک دانشگاه شهید بهشتی و دانشگاه MIT

فصل دهم

شمارش II

۱. شمارش زیر مجموعه‌ها

چه تعداد زیر مجموعه k عضوی از یک مجموعه n عضوی وجود دارند؟ این پرسش در همه زمان‌ها به صورت‌های متفاوتی در میاید:

- به چند روش می‌توانم ۵ کتاب از مجموعه ۱۰۰ کتاب خود را برای تعطیلات برگزینم؟
- چند دست ۱۳ ورق بریج را می‌توان از یک ورق ۵۲تایی توزیع نمود؟
- به چند روش می‌توانم ۵ نوع محصول مختلف برای پیتزایم انتخاب کنم اگر ۱۴ تا موجود باشد؟

این عدد غالباً به طوری مطرح می‌شود که عدد نویسی خاصی برای آن هست:

تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی =:: $\binom{n}{k}$

گزاره "$\binom{n}{k}$"خوانده می‌شود "f از n" اینک بلافاصله به سه پرسش مطرح شده بالا پاسخ می‌دهیم:

- می‌توانم ۵ کتاب از ۱۰۰ کتاب را به $\binom{۱۰۰}{۵}$ روش جدا کنیم.
- تعداد $\binom{۵۲}{۱۳}$ دست مختلف بریج وجود دارند.
- تعداد $\binom{۱۴}{۵}$ پیتزای مختلف مشکل از ۵ محصول مختلف وجود دارد محصول قابل دسترس باشند.

۱. ۱ قانون زیر مجموعه

می‌توانیم با استفاده از قانون تقسیم یک فورمول ساده برای n به انتخاب k بوجود آوریم.

این کار را با نگاشت هر جایگشت از یک مجموعه با n عضو $\{a_۱,\ldots,a_n\}$ به درون یک زیر مجموعه با k عضو به سادگی با برداشتن اولین k عضو متعلق به جایگشت انجام دهیم.

یعنی که، جایگشت $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ به مجموعهٔ $\{a_۱,a_۲,\ldots,a_k\}$ نگاشت خواهد شد.

توجه کنید که هر جایگشت دیگری با همان k عضو اولیه $a_۱,\ldots,a_k$ در هر ترتیبی که باشد و همان $n-k$ عضو باقی‌مانده به هر ترتیبی که باشد به این مجموعه نگاشت خواهد شد، یک جایگشت فقط می‌تواند به $\{a_۱,a_۲,\ldots,a_k\}$ نگاشت شود اگر اولین k عضو متعلق به جایگشت به ترتیبی عضو $a_۱,\ldots,a_k$ باشند. از آنجا که $k!$ جایگشت احتمالی متعلق به اولین k عضو و $(n-k)!$ جایگشت از عضو باقی‌مانده وجود دارد، از قانون حاصل‌ضرب نتیجه می‌گیریم که دقیقاً $k!(n-k)!$ جایگشت متعلق به مجموعه n عضوی به زیر مجموعه‌ای خاص s نگاشت دارد. به سخن دیگر، نگاشت از جایگشت زیر مجموعه‌های k عضوی عبارت است از یک

$k!(n-k)!$-۱. ولی می‌دانیم که $n!$ جایگشت متعلق به یک مجموعه $n-$ عضوی وجود دارد، بنابراین با توجه به قانون تقسیم، نتیجه می‌گیریم که

$$n!=k!(n-k)!\binom{n}{k}$$

که ثابت می‌کند:

قانون ۱ (قانون زیر مجموعه). عدد

$$\binom{n}{k},$$

تعداد زیر مجموعه k عضوی از یک مجموعه n عضوی عبارت است از

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

توجه داشته باشید که این قانون حتی برای زیر مجموعه‌هایی با ۰ عضو اثرگذار است: $\frac{n!}{0!\ n!}=1$ اینجا از این حقیقت بهره می‌بریم که $0!$ مضربی از ۰ عبارت است، که با ۱ برابر است. (یک حاصل‌جمع از ۰ عبارت برابر ۰ است.)

۲. ۱ دنباله‌های

چه تعداد دنباله‌ی n تایی دقیقاً محتوی k یک هستند؟ ما قبلاً نگاشت دوسویی ساده‌ای میان زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی و دنباله‌های nتایی را دیده‌ایم. برای مثال، یک زیرمجموعه ۳ عضوی از $\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ و دنباله ۸تایی مربوط در اینجا هست:

$$\{x_1, \qquad x_4,\ \ x_5 \qquad \}$$

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ )$$

توجه کنید که این دنباله دقیقاً ۳ تا یک دارد، هر کدام مطابق با یک عضو زیر مجموعه ۳ عضوی است. به صورت کلی‌تر، دنباله‌های n تایی مطابق با یک زیرمجموعه k عضوی دقیقاً k عدد یک خواهد داشت. بنابراین با توجه به قانون نگاشت دوسویی،

تعداد دنباله‌های n تایی با دقیقاً k عدد یک عبارت است از $\binom{n}{k}$.

۲. ترفند جادویی

یک شعبده‌باز و دست‌یارش ایستاده‌اند. دست‌یار با یک دست ورق ۵۲ تایی به میان جمعیت رفت و شعبده‌باز به سویی دیگر نگاه می‌کند. پنج تماشاچی هر کدام یک ورق بر می‌دارند، دست‌یار پنج ورق را جمع و چهارتای آن را طوری نگه می‌دارد که جادوگر (شعبده‌باز) آنها را ببیند.

شعبده‌باز برای مدت کوتاهی تمرکز می‌کند و سپس به درستی راز ورق پنجم را فاش می‌کند!

از آنرو که واقعاً باور نداریم که شعبده‌باز بتواند افکار را بخواند، می‌دانیم که دست‌یار به نحوی راز را با شعبده‌باز در میان گذاشته است. از آنجا که شعبده‌بازان و دست‌یاران واقعی مورد اعتماد نیستند، می‌توانیم توقع داشته باشیم که دست‌یار به صورت نارواییی با جملات رمزدار یا حرکات بدنی به شعبده باز علامت بدهد. ولی نیازی نیست این اتفاق بیفتد.

در واقع، شعبده‌باز و دست‌یار را می‌توان خارج از حوزه دید یکدیگر نگه داشت با این مورد که دست‌یار عده‌ای از تماشاگران را برای نگه داشتن <u>۴</u> ورق که او برمی‌گزیند تعیین کند.

ولی یک راه آشکار، قانونی هست که دست‌یار بتواند با شعبده‌باز ارتباط برقرار کند: او می‌تواند هر یک از ۲۴ = !۴ جایگشت از ۴ ورق را به ترتیبی که ورق‌ها نگه داشته است را انتخاب کند. با این وجود، این به تنهایی کار را تکمیل نمی‌کند: هنوز ۴۸ ورق در دسته ورق باقی‌مانده است، بنابراین دست‌یار ترتیب‌هایی به شکل گزینه‌های کافی در اختیار ندارد تا دقیقاً عنوان کند ورق مخفی کدام است (اگر چه می‌توانست آن را به دو ورق محدود سازد).

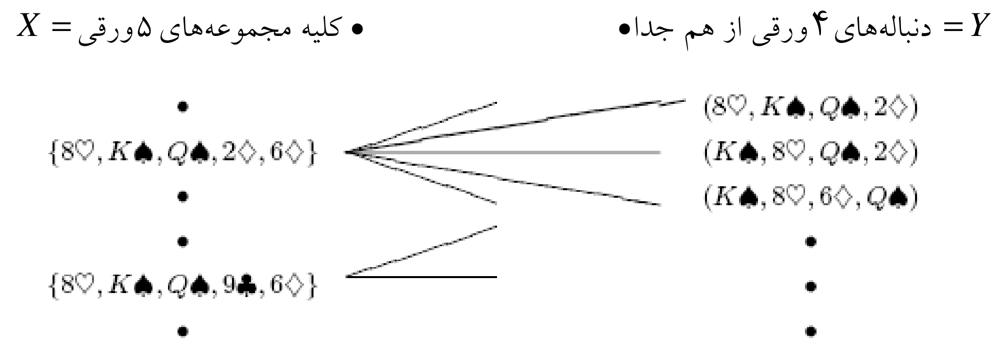
۱. ۲ راز

روشی که دست‌یار می‌تواند برای برقراری ارتباط با ورق پنجم از آن استفاده کند دقیقاً یک کاربرد خوب از آنچه درباره شمارش و جور کردن است که می‌شناسیم.

دست‌یار به طور واقع دو راه قانونی برای برقراری ارتباط در اختیار دارد. نه تنها می‌تواند به هر ترتیبی (که بخواهد) چهار ورق را نمایان سازد، بلکه همچنین می‌تواند انتخاب کند ***کدام چهار تا از پنج ورق را عیان سازد***.

البته، از آنرو که شعبده‌باز ورق راز را نمی‌شناسد، نمی‌تواند از میان پنج احتمالی که دست‌یار برگزیده است تشخیص بدهد کدام یک مورد نظر است. با این وجود، این شکل‌های قانونی برقراری ارتباط به دست‌یار امکان می‌دهند تا به طور نهانی ورق راز را برای شعبده‌باز افشا کند.

ابزارهای محاسباتی مقدار زیادی بینش برای رسیدن به ترفند جادویی در اختیارمان قرار می‌دهد. کلیه مجموعه‌های ۵ ورقی را در یک دسته X سمت چپ بگذارید. و همه دنباله‌های ۴ ورقی جدا از هم را در یک گروه Y سمت راست قرار دهید.



برای مثال $\{8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit, 6\diamondsuit\}$ عضوی از X در سمت چپ است. اگر جمعیت تماشاچی این مجموعه ۵ ورقی را برگزینند، پس دنباله‌های ۴ ورقی زیادی در سمت راست مجموعه Y وجود دارند که دست‌یار برای عیان ساختن می‌تواند آنها را انتخاب کند، من جمله $(8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit)$، $(K\spadesuit, 8\heartsuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit)$ و$(K\spadesuit, 8\heartsuit, 6\diamondsuit, Q\spadesuit)$. بیائید درباره این مسئله با عبارت‌های گراف فکر کنیم. عضو X و Y را به عنوان رئوس یک گراف دو بخشی در نظر بگیرید. اگر هر ورق موجود در دنباله، در مجموعه هم باشد یک یال میان مجموعه ۵ ورقی و دنباله ۴ ورقی رسم کنید. به سخن دیگر، اگر جمعیت یک مجموعه ورق را برگزینند، آنگاه دست‌یار باید دنباله‌ای از ورق‌ها را که در یک گراف دو بخشی هم جوار است را بر ملا کند. برخی از یال‌ها در نمودار بالا نمایش داده شده‌اند. آنچه نیاز داریم تا ترفند را اجرا کنیم. جورسازی رئوس X است؛ یعنی که، به زیرمجموعه‌ای از یال‌هایی که هر رأس سمت چپ را دقیقاً، به رأس جدا از هم سمت راست متصل کند، نیاز داریم. اگر چنین جورسازی وجود داشته باشد، پس دست‌یار و شعبده‌باز می‌توانند قبل از نمایش بر سر یک ورق به توافق برسند. سپس، جمعیت یک مجموعه ۵ ورقی را انتخاب می‌کند، دست‌یار دنباله متناظر ۴ ورقی را آشکار

می‌سازد. شعبده‌باز مجموعه متناظر ۵ ورقی را معنا می‌کند و آن یکی را که قبلاً بر ملا نشده را نام می‌برد.

برای مثال، فرض کنید دست‌یار و شعبده‌باز بر روی یک مماس که حاوی دو یال پررنگ بالا است به توافق برسند. اگر جمعیت مجموعه $\{8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 9\clubsuit, 6\diamondsuit\}$ را انتخاب کند، پس دست‌یار دنباله متناظر $(K\spadesuit, 8\heartsuit, 6\diamondsuit, Q\spadesuit)$ را نمایان می‌سازد. شعبده‌باز نام آن ورقی را که قبلاً بر ملا نشده را در مجموعه متناظر بر زبان می‌آورد، $9\clubsuit$. توجه کنید که مجموعه‌ها باید با دنباله‌های جدا از تطابق داشته باشند؛ اگر هنگامی که جمعیت مجموعه $\{8\heartsuit, K\spadesuit, Q\spadesuit, 2\diamondsuit, 6\diamondsuit\}$ را انتخاب می‌کند، دست‌یار همان دنباله را برگزیده، آنگاه شعبده‌باز نمی‌تواند تعیین کند که ورق باقی‌مانده $9\clubsuit$ یا $2\diamondsuit$ است!

تنها پرسش باقی‌مانده این است که تطابق برای رئوس X وجود داشته باشد. که به طور مشخص همان قضیه هال است، رئوس X را به مثابه دختران، رئوس Y را به عنوان پسران در نظر بگیرید و وهریال را به عنوان این علامت که یک دختر یک پسر را دوست دارد.

سپس یک جوربودن برای دخترها وجود دارد اگر و فقط اگر شرط ازدواج مورد رضایت قرار بگیرد:

هر زیر مجموعه‌ای از دختران حداقل یک مجموعه چه بسا بزرگ پسران را دوست دارد.

بیائید ثابت کنیم که شرط ازدواج با گراف ترفند جادویی مطابقت دارد. به چند واقعیت مقدماتی نیاز داریم:

- درجه هر رأس سمت چپ $۵\times۴!=۱۲۰$ است، از آنرو که پنج راه برای انتخاب ورق سر به مهر وجود دارد و $۴!$ جایگشت متعلق به ۴ ورق در کار است. در عبارت‌های ازدواج مجازی، هر دختر ۱۲۰ پسر را دوست دارد.
- درجه هر رأس سمت راست ۴۸ است، از آنرو که ۴۸ احتمال برای ورق پنجم وجود دارد. بنابراین، هر پسر، مورد علاقه ۴۸ دختر است.

حالا فرض کنید S یک مجموعه اختیاری رئوس سمت چپ باشد، که آن را به عنوان دختران در نظر می‌گیریم. تعداد $۱۲۰|S|$ یال واقع بر رئوس در این مجموعه وجود دارد.

از آنجا که هر پسر مورد علاقه ۴۸ دختر است، این مجموعه دختران حداقل $۱۲۰|S|/۴۸ \geq |S|$ پسران متفاوت را دوست دارد. بنابراین، شرط ازدواج مورد قبول است، با توجه به قضیه هال یک تطابق وجود دارد. در واقع، این استدلال نشان می‌دهد که شعبده‌باز همچنان می‌توانست ترفند را انجام دهد حتی اگر به جای ۴۸ ورق ۱۲۰ ورق مانده بود، یعنی اینکه آن ترفند با یک دست ورق ۱۲۰تایی هم – بدون هیچ جادویی! انجام شدنی بود.

۲. ۲ راز واقعی

ممکن است پاسخ پیش گفته را خیلی راضی کننده ندانید. روی هم رفته، به عنوان موضوعی عملی، دست‌یار و شعبده‌باز نمی‌توانند یک تطابق دارای $\binom{۵۲}{۵}=۲,۵۹۸,۹۶۰$ ریال را حفظ کنند!

چالش باقی‌مانده انتخاب یک تطابق است که فعلاً بتواند در هوا شمارش شود. یک راه حل را تشریح خواهیم کرد. به عنوان یک مثال دم دستی، فرض کنید که جمعیت انتخاب می‌کند:

$$10\heartsuit \quad 9\diamondsuit \quad 3\heartsuit \quad Q\spadesuit \quad J\diamondsuit$$

- دست‌یار دو ورق از یک خال را بیرون می‌کشد. در مثال، ممکن است دست‌یار $3\heartsuit$ و $10\heartsuit$ را انتخاب کند.
- دست‌یار مقادیر این دو ورق را در دایره نشان داده شده زیر قرار می‌دهد

K A 2
Q **3**
J 4
10 5
9 6
8 7

برای هر دو مقدار جدا از هم روی این دایره، از یکی همیشه با حداکثر ۶ قدم در جهت عقربه ساعت می‌توان به دیگری رسید. برای مثال، $3\heartsuit$ به اندازه ۶ شمارک در جهت گردش عقربه ساعت از $10\heartsuit$ قرار دارد.

- کارتی که از آن با حداکثر شش قدم به کارت دیگری می‌توان رسید برملای شود و آن دیگری به ورق راز تبدیل می‌شود. بنابراین، در مثال ما، $10\heartsuit$ برملا خواهد شد و $3\heartsuit$ ورق راز خواهد بود. بنابراین:
  - خال ورق راز همان خال اولین ورق برملا شده است.

- مقدار ورق راز میان ۱ تا ۶ شمارک در جهت گردش عقربه ساعت از مقدار اولین کارت برملا شده است.
- همه آنچه باقی می‌ماند تشخیص یک عدد میان ۱ تا ۶ است. شعبده‌باز و دست‌یار از قبل بر روی یک ترتیب همه ورق‌های یک دست از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین به این نحو توافق می‌کنند:

$$A\clubsuit\, 2\clubsuit \,\ldots\, K\clubsuit\, A\diamondsuit\, 2\diamondsuit \,\ldots\, Q\diamondsuit\, A\heartsuit\, 2\heartsuit \,\ldots\, Q\heartsuit\, A\spadesuit\, 2\spadesuit \,\ldots\, Q\spadesuit$$

ترتیبی که در آن سه ورق آخر بر ملا می‌شوند بر اساس طرح زیر با شماره ارتباط برقرار می‌کند:

۱ =	(بزرگ	متوسط	کوچک)
۲ =	(متوسط	بزرگ	کوچک)
۳ =	(بزرگ	کوچک	متوسط)
۴ =	(کوچک	بزرگ	متوسط)
۵ =	(متوسط	کوچک	بزرگ)
۶ =	(کوچک	متوسط	بزرگ)

در مثال، دست‌یار می‌خواهد ۶ را بفرستد و بنابراین سه کارت باقی‌مانده را به شکل بزرگ، متوسط – کوچک بر ملا می‌سازد. در اینجا دنباله کاملی که شعبده‌باز می‌بیند:

$$10\heartsuit \quad Q\spadesuit \quad J\diamondsuit \quad 9\diamondsuit$$

شعبده‌باز با ورق اول که $10\heartsuit$ باشد شروع می‌کند و ۶ شمارک به سمت گردش عقربه ساعت را رد می‌کند تا به $3\heartsuit$ برسد، که همان ورق راز است!

۳. ۲ همان ترفند با چهار ورق

فرض کنید که تماشاگران فقط چهار ورق را انتخاب می‌کنند و دست‌یار یک دنباله ۳ ورقی را به نظر شعبده‌باز می‌رساند. آیا شعبده‌باز می‌تواند ورق چهارم را معین کند؟

فرض کنید X کلیه مجموعه‌های چهار ورقی باشد که حضار انتخاب می‌کنند و فرض کنید Y تمام دنباله‌های سه ورقی باشد که ممکن است دست‌یار بر ملا سازد. حالا، با توجه به قانون زیر مجموعه داریم

$$|X| = \binom{۵۲}{۴} = ۲۷۰,۷۲۵$$

با توجه به قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته ، از طرف دیگر، داریم

$$|Y| = ۵۲.۵۱.۵۰ = ۱۳۲,۶۰۰$$

بنابراین، با توجه به اصل لانه کبوتر، دست‌یار باید یک دنباله سه ورقی یکسان را برای دو مجموع متفاوت چهار تایی برملا سازد. برای شعبده‌باز خبر بدی است: اگر آن دنباله سه ورقی را ببیند، آنگاه حداقل دو احتمال برای ورق چهارم وجود دارد که نمی‌تواند تشخیص بدهد. بنابراین هیچ راه قانونی برای دست‌یار وجود ندارد تا دقیقاً چیستی ورق چهارم را خبر بدهد!

۳. قانون کتاب دار

۱. ۳ دنباله زیرمجموعه‌ها

انتخاب یک زیرمجموعه k عضوی متعلق به n عضو انگار شکافتن یک مجموعه به یک جفت زیرمجموعه است: اولین زیرمجموعه به اندازه k و دومین زیرمجموعه متشکل از باقی‌مانده

$n-k$ عضو بنابراین قانون زیرمجموعه را می‌توان به مثابه قانونی برای شمارش تعداد چنین شاخه‌هایی به جفت‌های زیرمجموعه در نظر گرفت.

می‌توانیم این دو شکاف را به m زیرمجموعه تعمیم دهیم. مثلاً، فرض کنید A یک مجموعه با n عضو باشد و $k_۱,k_۲,\ldots$ و k_m اعداد صحیح غیرمنفی باشند که حاصل جمع‌شان n است یک $(k_۱,k_۲,\ldots,k_m)-$ شکاف از A دنباله $(A_۱,A_۲,\ldots,A_m)$ است که A_i زیرمجموعه‌های دو به دو از هم جدای A و $|A_i|=k$ برای $i=۱,\ldots,m$ است.

همان استدلال به کار رفته برای تشریح قانون زیر مجموعه، مستقیماً به قانونی برای شمارش تعداد شکاف‌ها به زیرمجموعه‌هایی با اندازه فرضی گسترش می‌یابد.

قانون ۲ (قانون شکاف زیرمجموعه). تعداد شکاف‌های $(k_۱,k_۲,\ldots,k_m)$ متعلق به یک مجموعه n عضوی عبارت است از

$$\binom{n}{k_۱,\ldots k_m}::=\frac{n!}{k_۱!\ \ k_۲!\ldots k_m}$$

برهان. این قانون اساساً همان برهان قانون زیرمجموعه است. مثلاً، ما هر جایگشت $a_۱,a_۲\ldots a_n$ متعلق به یک مجموعه n عضوی A را به یک شکافت $(k_۱,k_۲,\ldots,k_m)$ با فرض اینکه اولین شکافت زیرمجموعه نخستین $k_۱$ عضو جایگشت، دومین زیرمجموعه $k_۲$ عضو بعدی باشد ،...، نگاشت می‌کنیم، و mامین زیرمجموعه شکافت، آخرین k_m عضو جایگشت باشد. این نگاشت یک $k_۱!\ \ k_۲!\ldots k_m!$ به ۱- از جایگشتهای $n!$ به $(k_۱,k_۲\ldots,k_m)$ شکافت‌های متعلق به A است و قانون شکافت زیر مجموعه حالا از قانون تقسیم تبعیت می‌کند.

۲. ۳ دنباله‌هایی روی الفباء

همچنین می‌توانیم شمارش خود را درباره دنباله های n تایی را با k، یک را به شمارش دنباله‌های nتایی روی بیش از دو حرف تعداد تعمیم دهیم. برای مثال، چه تعداد دنباله را می‌توان با جابجا کردن حروف کلمه ۱۰ حرفی *Bookkeepre* تشکیل داد؟

توجه داشته باشید که $۱p,۳e,۲k,۲o,۱B$ و $۱R$ در *Bookkeepre* وجود دارند. این به یک نگاشت دوسویی مستقیم رو به جلو میان جایگشت‌های *BOOKKEEPER* و $(۱,۲,۲,۳,۱,۱)$ – شکافت‌های $\{۱,\ldots,n\}$ می‌انجامد مثلاً، جایگشتی را به دنباله مجموعه‌های مواضعی که حرف‌های مختلف واقع می‌شوند نگاشت کنید.

برای مثال، در جایگشت *BOOKKEEPER* حرف B در موضع نخست قراردارد، O در موضع ۲ و ۳ واقع می‌شود، Kها در مواضع ۴ و ۵ ، Eها در موضع ششم، هفتم و نهم، P در موضع هشتم و R در موضع دهم قرار می‌گیرد، بنابراین *BOOKKEEPER* نگاشت می‌شود به

$$\left(\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵\},\{۶,۷,۹\},\{۸\},\{۱۰\}\right).$$

از این نگاشت دوسویی و قانون شکافت زیرمجموعه، نتیجه می‌گیریم که تعداد روش‌های چیدمان مجدد حروف در واژه *BOOKKEEPER* چنین است:

$$\frac{\overbrace{۱۰!}^{\text{کلیهٔ حروف}}}{\underbrace{۱!}_{B\text{ها}}\ \underbrace{۲!}_{\text{Oها}}\ \underbrace{۲!}_{K\text{ها}}\ \underbrace{۳!}_{\text{Eها}}\ \underbrace{۱!}_{\text{Pها}}\ \underbrace{۱!}_{R\text{ها}}}$$

این مثال مستقیماً به یک اصل محاسباتی استثنائاً مفید تعمیم می‌یابد که به آن می‌گوئیم

قانون ۳ (قانون کتابدار)

فرض کنید $l_1,\ldots,l_m$ عضوهای متفاوت باشند. تعداد دنباله‌های با k_1 وقوع l_1 و k_2 وقوع‌های $k_m,\ldots,l_2$ وقوع l_m عبارت است از:

$$\frac{\left(k_1+k_2+\ldots+k_m\right)}{k_1!\ \ k_2!\ \ \ldots k_m!}$$

مثال. ۲۰ مایل راه‌پیمایی

در حال طراحی ۲۰ مایل راه‌پیمایی هستم، که شامل ۵ مایل به سمت شمال، ۵ مایل به سمت شرق، ۵ مایل به سمت جنوب و ۵ مایل به سمت غرب می‌شود. چه تعدا راه‌پیمایی ممکن می‌شود؟

یک نگاشت دوسویی میان راه‌پیمایی‌ها و دنباله‌هایی با $5S,5E,5N$ و $5W$ وجود دارد. با توجه به قانون کتابدار، تعداد چنین دنباله‌هایی از این قرار است:

$$\frac{20!}{5!^4}$$

۳.۳ یک کلمه درباره کلمات

ممکن است یک روزی به قانون شکافت زیرمجموعه یا قانون کتابدار در مقابل اتاقی پر از همکاران مراجعه کنید و متوجه شوید که همگی با نگاه مات به شما خیره شده‌اند. دلیلش این نیست که آنها گنگ هستند، ولی بیشتر به این علت است که ما "قانون کتابدار" را مطرح کرده‌ایم.

اگر چه قانون بسیار خوبی است و نامی در خور دارد. بنابراین پیشنهاد می‌کنیم که از خلال این عبارت‌ها آغاز کنید " می‌دانید؟ قانون کتابدار؟ شما بچه‌ها هیچ خبری ندارید؟؟؟ "قانون کتابدار را گاهی اوقات" فورمولی برای جایگشتهای باعینتیهای (اشیاء) غیر قابل تشخیص می‌نامند. اندازه زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه را گاهی وقت‌ها k ترکیبات می‌نامند. دیگر توصیف‌های هم آوا از این قرارند "ترکیب‌های مکرر، جایگشت‌های مکرر، $r-$ جایگشتها، جایگشت‌هایی با اشیاء غیرقابل تشخیص" و به همین ترتیب. با این همه، قوانین محاسباتی را که به شما آموختیم برای حل هرگونه مسئله بدون علم بر این سخن گنگ کفایت می‌کند، بنابراین از آن می‌گذریم.

۱. ٤ دست پوکر

در یک دست ورق ۵۲ ورق موجود است. هر ورق یک خال و یک مقدار دارد.

چهار خال وجود دارند	خشت	گشنیز	دل	پیک
	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

و ۱۳ مقدار در کار است:

$$۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,J,Q,K,A$$

بنابراین، برای مثال، ۸ $\heartsuit$ عبارت است از ۸ دل و $A\spadesuit$ یعنی که آس پیک. هر چه بیشتر به سمت راست در لیست برویم ارزش‌ها "بالاتر" و ارزشهای سمت چپ "پائین‌تر" محسوب می‌شوند.

پنج – ورق گرفتن نوعی بازی است که هر بازیکن یک دست دریافت می‌کند که، زیرمجموعه‌ای از ۵ ورق است. (بعد از آن بازی پیچیده می‌شود، ولی بیائید نگران آن نباشیم)

تعداد دست‌های مختلف در بازی پنج – ورق گرفتن عبارت است از زیرمجموعه‌های ۵ ورقی متعلق به مجموعه ۵۲ ورقی که ۵۲ به انتخاب ۵ است:

$$\text{دست‌ها (کل) جمع } \# = \binom{۵۲}{۵} = ۲{,}۵۹۸{,}۹۶۰$$

بیائید با مختصات ویژه دست‌های مختلف مقداری تمرین محاسباتی انجام دهیم.

۱. ٤ دست‌هایی با چهار ورق – از– یک – نوع (کارهٔ هشت یا دو)

$$\begin{array}{l} \{\quad 8\spadesuit,\quad 8\diamondsuit,\quad Q\heartsuit,\quad 8\heartsuit,\quad 8\clubsuit \quad \} \\ \{\quad A\clubsuit,\quad 2\clubsuit,\quad 2\heartsuit,\quad 2\diamondsuit,\quad 2\spadesuit * \} \end{array}$$

به طور عادی، اولین مرحله، کشیدن این پرسش به یک مسئله دنباله محاسباتی است. دستی با چهار ورق – از – یک – نوع توسط دنباله مخصوص تشریح شده است:

۱– مقدار چهار ورق

۲– مقدار ورق اضافی (غیر)

۳– خال کارت اضافی

بنابر این، یک نگاشت دوسویی میان دست‌هایی با چهار ورق – از – یک – نوع و دنباله متشکل از دو مقدار جدا از هم که با یک خال دنبال می‌شوند وجود دارد. برای مثال، سه دست بالا با دنباله‌های زیر تشریک مساعی دارند:

$$\begin{array}{lcl} (8, Q, \heartsuit) & \leftrightarrow & \{ \quad 8\spadesuit, \quad 8\diamondsuit, \quad 8\heartsuit, \quad 8\clubsuit, \quad Q\heartsuit \quad \} \\ (2, A, \clubsuit) & \leftrightarrow & \{ \quad 2\clubsuit, \quad 2\heartsuit, \quad 2\diamondsuit, \quad 2\spadesuit, \quad A\clubsuit \quad \} \end{array}$$

اینک فقط نیاز به شمارش دنباله‌ها داریم. ۱۳ راه برای انتخاب مقدار اول ۱۲ راه برای انتخاب مقدار دوم و ۴ روش برای انتخاب خال وجود دارد. بنابراین، با توجه به قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته ۶۲۴ = ۱۳.۱۲.۴. دست‌هایی با چهار ورق – از – یک – نوع وجود دارد. معنی‌اش این است که فقط ۱ دست در حدود ۴۱۶۵ دست، چهار ورق– از– یک– نوع دارد، تعجبی ندارد، به این یک دست خوب پوکر می‌گویند!

۲. ٤ دست‌هایی با یک خانهٔ پر

خانهٔ پر، دستی با سه۳ ورق از یک مقدار و دو۲ ورق از مقدار دیگر است.

چند مثال در این باره عبارتند از:

$$\begin{array}{l} \{ \quad 2\spadesuit, \quad 2\clubsuit, \quad 2\diamondsuit, \quad J\clubsuit, \quad J\diamondsuit \quad \} \\ \{ \quad 5\diamondsuit, \quad 5\clubsuit, \quad 5\heartsuit, \quad 7\heartsuit, \quad 7\clubsuit \quad \} \end{array}$$

دوباره به مسئله‌ای درباره دنباله‌ها سر می‌زنیم. میان دست‌های خانه‌های پر و دنباله‌های مخصوص یک نگاشت دوسویی وجود دارد:

۱. مقدار متعلق به سه‌گانه، که به ۱۳ روش می‌توانند انتخاب شوند.

۲. خال‌های متعلق به سه‌گانه (سه‌خال) که به $\binom{۴}{۳}$ روش می‌توانند انتخاب شوند.

۳. مقدار جفت‌ورق، که به ۱۲ روش می‌توانند انتخاب شوند.

٤. خال‌های جفت‌ورق، که به $\binom{۴}{۲}$ روش می‌توانند انتخاب شوند.

به عنوان مثال تناظر بین دسته‌ها و دنباله در پائین نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{array}{lcl} (2, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}, J, \{\clubsuit, \diamondsuit\}) & \leftrightarrow & \{ \quad 2\spadesuit, \quad 2\clubsuit, \quad 2\diamondsuit, \quad J\clubsuit, \quad J\diamondsuit \quad \} \\ (5, \{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}, 7, \{\heartsuit, \clubsuit\}) & \leftrightarrow & \{ \quad 5\diamondsuit, \quad 5\clubsuit, \quad 5\heartsuit, \quad 7\heartsuit, \quad 7\clubsuit \quad \} \end{array}$$

با توجه به قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته، تعداد خانه‌های پر عبارت است از:

$$۱۳.\binom{۴}{۳}.۱۲.\binom{۴}{۲}$$

ما الان روی دور افتاده‌ایم، ولی داریم به یک سرعت‌گیر بر می‌خوریم.

۳. ٤ دست‌هایی با دو جفت

چه تعداد دست دارای دو جفت هستند، یعنی که، دو ورق با یک مقدار، دو ورق با مقدار دیگر و یک ورق با مقدار سوم. چند مثال:

$$\begin{array}{l} \{ \quad 3\diamondsuit, \quad 3\spadesuit, \quad Q\diamondsuit, \quad Q\heartsuit, \quad A\clubsuit \quad \} \\ \{ \quad 9\heartsuit, \quad 9\diamondsuit, \quad 5\heartsuit, \quad 5\clubsuit, \quad K\spadesuit \quad \} \end{array}$$

هر دستی که دو جفت داشته باشد با دنباله‌ای متشکل از موارد زیر توصیف شده است:

۱– مقدار جفت اول، که با ۱۳ روش انتخاب می‌شود.

۲– خال‌های جفت اول، که با $\binom{۴}{۲}$ روش انتخاب می‌شود.

۳– مقدار جفت دوم، که با ۱۲ روش انتخاب می‌شود.

٤– خال‌های جفت دوم، که با $\binom{۴}{۲}$ روش انتخاب می‌شود.

۵– مقدار ورق پنجم که با ۱۱ روش می‌تواند انتخاب شود.

٦- خال ورق پنجم که $\binom{۴}{۱}=۴$ روش می‌تواند انتخاب شود.

بنابراین، تعداد دست‌هایی که با دو جفت واقع می‌شوند عبارت است از:

$$۱۳.\binom{۴}{۲}.۱۲.\binom{۴}{۲}.۱۱.۴$$

پاسخ غلط است! مسئله این است که یک نگاشت دوسویی از چنین دنباله‌هایی با دست‌های دو پر وجود ندارد. این عملاً یک نگاشت ۲ به ۱ است. برای مثال، اینجا جفت دنباله‌هایی هستند که به دست‌های فرض بالا نگاشت می‌شوند:

$$\begin{array}{ll} (3,\{\diamondsuit,\spadesuit\},Q,\{\diamondsuit,\heartsuit\},A,\clubsuit) \searrow & \\ & \{\ 3\diamondsuit,\ 3\spadesuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\heartsuit,\ A\clubsuit\ \} \\ (Q,\{\diamondsuit,\heartsuit\},3,\{\diamondsuit,\spadesuit\},A,\clubsuit) \nearrow & \\ (9,\{\heartsuit,\diamondsuit\},5,\{\heartsuit,\clubsuit\},K,\spadesuit) \searrow & \\ & \{\ 9\heartsuit,\ 9\diamondsuit,\ 5\heartsuit,\ 5\clubsuit,\ K\spadesuit\ \} \\ (5,\{\heartsuit,\clubsuit\},9,\{\heartsuit,\diamondsuit\},K,\spadesuit) \nearrow & \end{array}$$

مسئله این است که هیچ چیز جفت اول را از جفت دوم مشخص نمی‌سازد. یک جفت ۵ و یک جفت از ۹ مانند یک جفت از ۹ و یک جفت ۵ است. ما در شمارش خانه‌های پر (دست فول) از این مشکل اجتناب کردیم. زیرا برای مثال یک جفت ۶ و سه تا شاه با یک جفت شاه و سه تا ۶ فرق می‌کند.

دفعه قبل هنگامی که درباره شمارش چیدمان مهره‌های مختلف روی صفحه شطرنج به سمت شمارش دو رخ همسان رفتیم، دقیقاً به این مشکل برخوردیم. راه حل در آن وقت به کار بردن

قانون تقسیم بود و می‌توانیم همان کار را اینجا انجام دهیم. در این حالت، قانون تقسیم می‌گوید که دنباله‌ها دو برابر دست‌ها هستند، بنابراین تعداد دست‌های دو جفتی عبارت است از:

$$\frac{13.\binom{4}{2}.12.\binom{4}{2}.11.4}{2}$$

راه حلی دیگر

مثال پیش گفته دردسر ساز بود! هر کسی می‌تواند به سادگی از آن واقعیت صرف‌نظر کند که نگاشت به صورت ۲ به ۱ است امتحان را نگذرانده بود، ناامید از دوره شود و به یک زندگی جرم یاره باز گردد. با دو روش می‌توانید جهان را به محلی امن‌تر تبدیل سازید:

۱. هرگاه که از نگاشت $f : A \to B$ استفاده می‌کنید تا یک مسئله محاسباتی را به دیگری ترجمه کنید، تعداد عضو موجود A که به هر عضو B نگاشته شده را بررسی کنید. این کار اندازه A مرتبط به B را مشخص می‌کند. سپس می‌توانیم از قانون تقسیم با فاکتوری درست و مناسب استفاده کنید.

۲. به عنوان یک بررسی مجدد، سعی کنید همان مسئله را از راهی دیگر حل کنید.روش‌های ضربی غالباً در دسترس هستند – و همگی بهتر از هر چیزهمان پاسخ را می‌دهند.(بعضی وقت‌ها روش‌های متفاوت پاسخ‌هایی می‌دهند که به نظر مختلف می‌آیند، ولی بعد از کمی جبر همان نتیجه از کار در می‌آید.)

قبلاً از روش نخست استفاده کردیم، بیائید دومی را امتحان کنیم. یک نگاشت دوسویی میان دست‌هایی با دو جفت و دنباله‌ها وجود دارد که معین می‌کند:

۱. مقدار دو جفت، که می‌توانند به $\binom{۱۳}{۲}$ روش انتخاب شوند.

۲. خال‌های جفت باارزش کمتر، که می‌توانند به $\binom{۴}{۲}$ روش انتخاب شوند.

۳. خال‌های جفت با ارزش بالاتر، که می‌توانند به $\binom{۴}{۲}$ روش انتخاب شوند.

٤. مقدار ورق نیم، که می‌تواند به ۱۱ روش انتخاب شود.

۵. خال ورق نیم، که می‌تواند به $۴ = \binom{۴}{۱}$ روش انتخاب شود.

برای مثال، دنباله‌ها و دست‌های زیر با هم منطبق هستند:

$$\begin{array}{ccc} (\{3,Q\},\{\diamondsuit,\spadesuit\},\{\diamondsuit,\heartsuit\},A,\clubsuit) & \leftrightarrow & \{\quad 3\diamondsuit,\quad 3\spadesuit,\quad Q\diamondsuit,\quad Q\heartsuit,\quad A\clubsuit\quad\} \\ (\{9,5\},\{\heartsuit,\clubsuit\},\{\heartsuit,\diamondsuit\},K,\spadesuit) & \leftrightarrow & \{\quad 9\heartsuit,\quad 9\diamondsuit,\quad 5\heartsuit,\quad 5\clubsuit,\quad K\spadesuit\quad\} \end{array}$$

بنابراین،تعداد دست‌های با دو جفت عبارت است از:

$$\binom{۱۳}{۲}.\binom{۴}{۲}.\binom{۴}{۲}.۱۱.۴$$

این همان جوابی است که قبلاًبه آن رسیدیم، اگر چه به شکلی کمی متفاوت‌تر.

٤. دست‌هایی با هر خال

چه تعداد دست‌هایی که حداقل حاوی یک ورق از هرخالی باشند وجود دارد؟یک مثال از چنین دستی عبارت است از:

$$\{\ 7\diamondsuit,\ K\clubsuit,\ 3\diamondsuit,\ A\heartsuit,\ 2\spadesuit\ \}$$

هر چنین دستی بادنباله‌ای توصیف می‌شود که مشخص می‌سازد:

۱– مقدار خشت، گشنیز، دل، و پیک،که می‌توانند به $۱۳^۴ = ۱۳.۱۳.۱۳.۱۳$ روش انتخاب شوند.

۲– خال ورق پنجم، که به ٤ روش انتخاب شود.

۳– مقدار ورق پنجم، که به ۱۲ روش می‌تواند انتخاب شود.

برای مثال،دست بالا با دنباله زیر توصیف می‌شود:

$$(7, K, A, 2, \diamondsuit, 3) \quad \leftrightarrow \quad \{\ 7\diamondsuit,\ K\clubsuit,\ A\heartsuit,\ 2\spadesuit,\ 3\diamondsuit\ \}$$

آیا دنباله‌های دیگری وجود دارد که با همان دست منطبق باشد؟ یکی دیگر هست! می‌توانستیم به طور برابر به $\diamondsuit$۳ و $\diamondsuit$۷ به طور ورق‌های مازاد نگاه کنیم، بنابراین عملاً این یک نگاشت ۲ به ۱ است. در اینجا دو دنباله که با مثال دست انطباق داشته باشد وجود دارند:

$$\begin{matrix} (7, K, A, 2, \diamondsuit, 3) & \searrow & \\ & & \{\ 7\diamondsuit,\ K\clubsuit,\ A\heartsuit,\ 2\spadesuit,\ 3\diamondsuit\ \} \\ (3, K, A, 2, \diamondsuit, 7) & \nearrow & \end{matrix}$$

بنابراین، تعداد دست‌ها با هر خالی عبارت است از:

$$\frac{۱۳^۴.۴.۱۲}{۲}$$

۵. قضیه دو جمله‌ای

شمارش چشم اندازی به یکی از قضیه‌های جبر فراهم می‌سازد. دو جمله‌ای عبارت است از حاصل‌جمع دو عبارت، مثل $a+b$. حالا توان چهارم آن را یعنی ، $(a+b)^۴$ را در نظر بگیرید. بطور کامل این عبارت را چهار بار در خودش ضرب کنیم، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}(a+b)^۴ = \; & aaaa+aaab+aaba+aabb \\ & +abaa+abab+abba+abbb \\ & +baaa+baab+baba+babb \\ & +bbaa+bbab+bbba+bbbb\end{aligned}$$

توجه کنید که یک عبارت برای هر دنباله‌ای از aها و bها وجود دارد. بنابراین تعداد $۲^۴$ عبارت وجود دارد، وتعداد عبارتهایی که k کپی از b و $n-k$ از a را شامل می‌شود با توجه به قانون کتابدار عبارت است از:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

حالا بیائید عبارت‌های هم‌ارز را یکجا جمع کنیم. مانند $aaba=abaa=baaa$. آنگاه ضریب $a^{n-k}b^k$ عبارت است از $\binom{n}{k}$.

بنابراین برای $n=۴$، داریم:

$$(a+b)^۴=\binom{۴}{۰}.a^۴.b^۰+\binom{۴}{۱}.a^۳b^۱+\binom{۴}{۲}.a^۲b^۲+\binom{۴}{۳}.a^۱b^۳+\binom{۴}{۴}.a^۰b^۴$$

در کل، این استدلال قضیه دو جمله‌ای را پیش می‌کشد:

قضیه ۱. ۵ (قضیه دو جمله‌ای). برای همه $n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

به عبارت $\binom{n}{k}$ غالباً "ضریب دو جمله‌ای" به افتخار حضورش در این محل می‌گویند.

این گونه استدلال درباره عبارت‌های دو جمله‌ای به خوبی به عبارت‌های چند جمله‌ای می‌گسترد، که عبارت از حاصل‌جمع‌های دو عبارت یا بیشتر است.

برای مثال، فرض کنید در جستجوی ضریب

$$bo^2k^2e^3pr$$

در گزاره $(b+o+k+e+p+r)^{10}$ هستیم. هر عبارت این گزاره حاصل‌ضربی از ۱۰ متغیراست که هر متغیر یکی ازآن عبارت‌های b,o,K,e,p یا r است.

حالا ضریب $bo^2k^2e^3pr$ تعدادی از آن عبارت‌هایی دقیقاً با $1b,2o,2k,3e,1p$ و $1r$است و تعداد چنین عبارتهایی دقیقاً به تعداد چیدمان‌های مجدد کلمه $BOOKKEEPER$ است:

$$\binom{10}{1,2,2,3,1,1} = \frac{10!}{1!\ 2!\ 2!\ 3!\ 1!\ 1!}$$

گزاره سمت چپ "ضریب چند جمله‌ای"نامیده می‌شود.این استدلال به یک قضیه کلی منجر می‌شود:

قضیه ۲. ۵ (قضیه چند جمله‌ای) برای هر $n\in$ □ و $z_1,\dots z_m\in$ □ :

$$(z_1+z_2+\cdots+z_m)^n=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{N}\\ k_1+\cdots+k_m=n}}\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m}z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdots z_m^{k_m}$$

شما برایتان بهتر است استدلالی که برای قضیه چند جمله‌ای است را به خاطر بسپارید تا این بیانیه رسمی را.

٤. برهان ترکیبی

فرض کنید n تی شرت مختلف دارید که فقط می‌خواهید k تا را نگه دارید. به طور برابر می‌توانید k پیراهن را انتخاب کنید یا مجموعه مکمل $n-k$ پیراهن را که می‌خواهید دور بی‌اندازید را انتخاب کنید. خب، تعداد راه‌های انتخاب k پیراهن ازمیان n باید با تعداد راه‌های انتخاب $n-k$ مساوی باشد درمیان n راه.بنابر این:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

از نظر جبری اثبات این قضیه ساده است، زیرا که هر دو طرف برابرند با:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ولی اجباری نداشتیم به جبر متوسل شویم! فقط از اصول محاسباتی استفاده کردیم.

آها...ها.

۱. ٦ مشت زنی

آیشان، معروف به $۶.۰۴۲TA$، تصمیم گرفته به عضویت تیم مشت‌زنی المپیک آمریکا در آید. با این همه، تمام فیلم‌های راکی را تماشا کرده وساعت‌ها در مقابل آینه وقت گذاشته وبا پوزخند گفته است"آهای، تو می‌خوای منوتکه پاره کنی؟"

آیشان تصور می‌کند که n نفر (من‌جمله خودش)در حال رقابت برای کسب امتیاز در تیم هستند و فقط k نفر انتخاب خواهند شد. به عنوان بخشی از مانوور دادن برای کسب جا در تیم نیاز دارد تعداد تیم‌های مختلف ممکن را برآورد کند. دو مورد هست که باید ملاحظه شود:

- آیشان برای عضویت در تیم انتخاب شده است او $k-۱$ هم‌تیمی‌هایش ازمیان دیگر $n-۱$ رقبا انتخاب می‌شوند. تعداد تیم‌هایی که با این روش تشکیل می‌شوند عبارت است از:

$$\binom{n-۱}{k-۱}$$

- آیشان برای عضویت در تیم انتخاب نشده است، و تمام k عضو تیم ازمیان دیگر $n-۱$ رقبا انتخاب می‌شوند. تعداد تیم‌هایی که می‌توانند با این روش تشکیل شوند عبارت است از:

$$\binom{n-۱}{k}$$

همه تیم‌های دسته اول آیشان را دارند، و هیچ تیم دستهٔ دومی ندارد؛ بنابر این، هر دو مجموعهٔ تیم‌ها از هم جدا هستند. بنابر این، با توجه به قانون حاصل‌جمع، تعداد کل تیم‌های مشت‌زنی المپیک عبارت است از:

$$\binom{n-۱}{k-۱}+\binom{n-۱}{k}$$

سایان،که او هم معروف به $۶.۰۴۲TA$ است، فکر می‌کند که آیشان آنقدرها هم بادوام نیست و خودش هم می‌تواند در این راه تلاش کند. اینچنین استدلال می‌کند که n فرد (من‌جمله خودش) برای گرفتن k جا در تیم تلاش می‌کنند، بنابراین به سادگی تعداد روش‌های انتخاب شدن در تیم عبارت است از:

$$\binom{n}{k}$$

سایان و آیشان هر کدام به درستی تعداد تیم‌های احتمالی مشت زنی را حساب کردند بنابراین، پاسخ‌هایشان باید برابر باشد. بنابراین می‌دانیم:

$$\binom{n-۱}{k-۱}+\binom{n-۱}{k}=\binom{n}{k}$$

این را اتحاد پاسکال می‌نامند و ما بدون هیچ گونه اتحادجبری آن را ثابت کردیم. در عوض، به طور خالص به تکنیکهای محاسباتی تکیه کردیم.

۲. ٦ برهان ترکیبی

برهان ترکیبی استدلالی است که با تکیه بر اصول محاسباتی یک حقیقت‌جبری را بر پا می‌کند. بسیاری از چنین برهان‌ها از رئوس مطالب پایه‌ای تبعیت می‌کنند:

۱- یک مجموعه S را تعیین کنید.

۲- نشان دهید که با شمارش یک روش $|S|=n$

۳- نشان دهید که با توجه به شمارش روشی دیگر $|S|=m$

٤- نتیجه بگیرید که $n=m$

در مثال پیش گفته، S عبارت بود از مجموعه کلیه تیم‌های احتمالی مشت‌زنی المپیک.

آیشان با شمارش یک روش $|S|=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ به این نتیجه رسید و سایان با روشی دیگر $|S|=\binom{n}{k}$ چنین نتیجه گرفت. مساوی فرض کردن این دو گزاره به اتحاد پاسکال می‌انجامد.

به صورت نوعی‌تر، مجموعه S به شکل عبارتهایی با دنباله‌های ساده یا مجموعه‌هایی فراتر از یک داستان مفصل تعیین می‌شود. اینجا یک مثال کم‌رنگ‌تر از استدلال ترکیبی هست.

قضیه ۱. ٦ $\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}\binom{۲n}{n-r}=\binom{۳n}{n}$

برهان. یک برهان ترکیبی ارائه می‌کنیم. فرض کنید S تمام n دست ورق‌هایی باشد که از یک دست پاسور که متعلق به n ورق قرمز (شماره‌بندی شده از $۱,...,n$) و $۲n$ ورق سیاه

(شماره‌بندی شده از $۱,...,۲n$) باشد. در ابتدا، توجه کنید که هر مجموعه $۳n$ عضوی

$|S|=\binom{۳n}{n}$ زیر مجموعه‌ی $n-$ عضوی دارد.

از چشم اندازی دیگر، تعداد دست‌های دقیقاً با r ورق قرمز عبارت است از

$$\binom{n}{r}\binom{۲n}{n-r}$$

زیرا که $\binom{n}{r}$ روش برای انتخاب r ورق قرمز وجود دارد و $\binom{۲n}{n-r}$ روش برای انتخاب $n-r$ ورق سیاه موجود است. از آنجا که تعداد ورقهای قرمز می‌توانند هر کجا از $۰,۱,...,n$ باشند، تعداد کل $n-$ دست ورق عبارت است از:

$$|S|=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}\binom{۲n}{n-r}$$

با مساوی فرض کردن این دو گزاره برای $|S|$ قضیه ثابت می‌شود. □

برهان‌های ترکیبی تقریباً جادو کننده‌اند. قضیه ۱. ٦ کاملاً ترسناک به نظر می‌آید، ولی روی هم رفته بدون هیچ گونه دست کاری جبری آن را ثابت کردیم، کلید بنای یک برهان ترکیبی به درستی انتخاب مجموعه S است، که می‌تواند گول زننده باشد. به طور کلی، طرف ساده‌تر معادله باید مقداری راهنمایی فراهم کند. برای مثال، قسمت سمت راست قضیهٔ ۱. ٦، $\binom{۳n}{n}$، که انتخاب S را به عنوان تمام زیر مجموعه‌های n عضوی متعلق به مجموعه $۳n$ عضوی پیشنهاد می‌دهد.