بسمه تعالی

دوره‌های آزاد رایانه‌ای
SBU-MIT OCW Joint Project

معاونت فناوری اطلاعات وارتباطات

پروژه مشترک دانشگاه شهید بهشتی و دانشگاه MIT

کد درس: ۱۸/۰۶۲J و ۶/۰۴۲J

مقطع آموزشی: کارشناسی

عنوان درس:
ریاضیات
برای علوم کامپیوتر

استاد مدرس MIT : پروفسور آلبرت مِیر و پروفسور رونیت روبینفلد

استاد مترجم SBU: دکتر چنگیز اصلاح‌چی

فصل نه

شمارش، I

20480135385502964448038	3171004832173501394113017	5763257331083479647409398	8247331000042995311646021
489445991866915676240992	3208234421597368647019265	5800949123548989122628663	8496243997123475922766310
1082662032430379651370981	3437254656355157864869113	6042900801199280218026001	8518399140676002660747477
1178480894769706178994993	3574883393058653923711365	6116171789137737896701405	8543691283470191452333763
1253127351683239693851327	3644909946040480189969149	6144868973001582369723512	8675309258374137092461352
1301505129234077811069011	3790044132737084094417246	6247314593851169234746152	8694321112363996867296665
1311567111143866433882194	3870332127437971355322815	6814428944266874963488274	8772321203608477245851154
1470029452721203587686214	4080505804577801451363100	6870852945543886849147881	8791422161722582546341091
1578271047286257499433886	4167283461025702348124920	6914955508120950093732397	9062628024592126283973285
1638243921852176243192354	4235996831123777788211249	6949632451365987152423541	9137845566925526349897794
1763580219131985963102365	4670939445749439042111220	7128211143613619828415650	9153762966803189291934419
1826227795601842231029694	4815379351865384279613427	7173920083651862307925394	9270880194077636406984249
1843971862675102037201420	4837052948212922604442190	7215654874211755676220587	9324301480722103490379204
2396951193722134526177237	5106389423855018550671530	7256932847164391040233050	9436090832146695147140581
2781394568268599801096354	5142368192004769218069910	7332822657075235431620317	9475308159734538249013238
2796605196713610405408019	5181234096130144084041856	7426441829541573444964139	9492376623917486974923202
2931016394761975263190347	5198267398125617994391348	7632198126531809327186321	9511972558779880288252979
2933458058294405155197296	5317592940316231219758372	7712154432211912882310511	9602413424619187112552264
3075514410490975920315348	5384358126771794128356947	7858918664240262356610010	9631217114906129219461111
3111474985252793452860017	5439211712248901995423441	7898156786763212963178679	9908189853102753335981319
3145621587936120118438701	5610379826092838192760458	8147591017037573337848616	9913237476341764299813987
3148901255628881103198549	5632317555465228677676044	8149436716871371161932035	
3157693105325111284321993	5692168374637019617423712	8176063831682536571306791	

دو زیر مجموعه. متفاوت از اعداد ۲۵ رقمی که در بالا نمایش داده شده‌اند دارای حاصل‌جمع یکسان هستند. برای مثال، ممکن است حاصل‌جمع اعداد ستون اول با حاصل‌جمع اعداد ستون دوم برابر باشد. آیا می‌توانید دو زیر مجموعه نظیر اینها پیدا کنید؟ این یک مسئله شمارشی بسیار سخت است. ولی ثابت خواهیم کرد که چنین زیر مجموعه‌هایی باید باشند. این یک نوع نتیجه‌گیری خارق‌العاده است که یک نفر می‌تواند با استفاده مهارت‌آمیز از شمارش مثل عنوان این فصل به آن نایل شود.

شمارش به نظر می‌رسد که خیلی ساده باشـد: ...,۱,۲,۳,۴ ایـن روش روشـن بـه خـوبی بـرای شمارش اشیاء ساده مثل انگشت‌های پا اثـر گـذار اسـت و بـرای اشـیاء بسـیار بـدرفتاری‌ای کـه ساختاری با ماهیت مشخص ندارند. با این حال، روش‌های زیرکانه‌تر به شما کمـک مـی‌کننـد تـا بسیاری چیزها را در زمینه‌های گسترده‌تر بشمارید، مثل:

- تعداد راه‌های متفاوت انتخاب ۱۲ پیراشکی از ۵ مدل پیراشکی موجود.
- دنباله‌ای از اعداد که در نمایش مبنای ۲ آنها ١٦ رقم وجود دارد که دقیقاً ٤تای این رقم‌ها ۱ هستند.

شمارش در علوم کامپیوتر به چند دلیل مفید است:

- تعیین مدت زمان و ذخیره موارد مورد نیاز برای حل یک مسئله شمارشـی ـ یـک هـدف اصلی در علوم کامپیوتر– اغلب به حل یک مسئله شمارشی تنزل می‌یابد.
- شمارش، عبارت است از پایهٔ نظریه احتمالات، که به نوبه‌ی خود شاید مهم‌ترین موضـوع این ترم باشد.
- دو تکنیک قابل ملاحظه‌ی برهان، "اصـل لانـه کبـوتر" و "برهـان ترکیبـاتی" مبتنـی بـر شمارشی‌اند. این موارد به موضوعات جالب توجه متنوع و فراست‌های مفید می‌انجامد.

قصد داریم تعداد زیادی قواعد برای شمارش ارائه کنیم. این قواعد عملاً قضـیه هسـتند ولـی کلاً در پی اثبات آن‌ها نیستیم. هدف ما آموزش شمارش به شما به عنوان یک مهـارت عملـی است، مانند انتگرال‌گیری و اکثر قواعد به هر حال به نظر "معلوم" می‌رسند.

۱. شمارش چیزی با شمارش چیزی دیگر

شما چگونه افرادی که در یک اتاق تجمع کرده‌اند را می‌شمارید؟ می‌توانیم سرها را بشماریم، از آنرو که هر شخص فقط یک سر دارد. متناوباً، می‌توانیم گوش‌ها را بشماریم و به دو تقسیم کنیم البته، می‌بایست در صورتی که یک نفر در یک حادثه راهزنی یک گوشش را از دست داده و یا دیگری با سه گوش به دنیا آمده باشد را در شمارش تعدیل کنیم. نکته در اینجا این است که ما اغلب چیزی را با چیز دیگر شمارش می‌کنیم، هر چند که امکان دارد عوامل در هم و برهمی مورد نیاز باشد. این پایه‌ی اصل شمارش است، از آسان‌ترین مسئله و سخت‌ترین آنها. در عبارتهای رسمی‌تر، هر مسئله شمارشی به تعیین اندازه یک مجموعه تنزل می‌کند.

اندازه یا تعداد عضوهای یک مجموعه S عبارت است از تعداد عضوهای موجود در S و به صورت $|S|$ نوشته می‌شود. در این عبارت‌ها، می‌خواهیم ادعا کنیم که می‌توانیم اندازه یک مجموعه S را با پیدا کردن اندازه یک مجموعه وابسته به دیگری نظیر T بدست آوریم. ما همچنین ابزارهای ریاضی را برای ارتباطی در یک مجموعه با سایر روابط در اختیار داریم. جای شگفتی نباشد، یک نوع رابطه ویژه در قلب شمارش وجود دارد.

۱. ۱ قانون نگاشت دوسویی

اگر بتوانیم همه دخترها را با پسرها در محل رقص جفت وجور کنیم، پس باید تعداد برابر از هر کدام وجود داشته باشد. این نگاه ساده به یک قاعده شمارشی، به یک قانون قدرتمند شمارش تعمیم می‌یابد:

قانون ۱ (قانون نگاشت دوسویی). اگر یک نگاشت دوسویی باشد $f : A \to B$ موجود باشد پس $|A| = |B|$.

در مثال، A مجموعه پسران است، B مجموعه دختران و تابع f معین می‌کند که آنها چگونه جفت شده‌اند.

قانون نگاشت دو سویی به عنوان ذره‌بین توان شمارشی عمل می‌کند؛ اگر اندازه یک مجموعه را به تصویر می‌کشید، آنگاه بلافاصله می‌توانید اندازه بسیاری دیگر از مجموعه‌ها را از طریق نگاشت دوسویی تعیین کنید. برای مثال، بیائید به دو مجموعه پیش گفته باز گردیم:

$A =$ همه راه‌ها برای انتخاب یک دو جین نان شیرینی گرد هنگامی که پنج نمونه مختلف وجود داشته باشد.

$B =$ همه دنباله‌های دودویی ۱۶ تایی با دقیقاً ۴ تا از آنها یک هستند.

بیائید یک عنصر ویژه مجموعه A را در نظر بگیریم:

$\underbrace{oo}$	$\underbrace{oo}$	$\underbrace{oooooo}$	$\underbrace{\quad}$	$\underbrace{oo}$
شکلات مسطح	شکلات براق	شکری	لیموناد	شکلات

هر نان (نان شیرینی گرد) را با o نشان داده‌ایم و میان هر نوع مختلف فاصله‌ای ایجاد کرده‌ایم. به این ترتیب، انتخاب بالا حاوی دو نان شیرینی شکلاتی، صفر شیرینی لیمویی، شش شیرینی شکری، دو نان شیرینی مسطح و دو نان شیرینی براق است. حالا بیائید یک عدد ۱ را در میان فاصله‌ها قرار دهیم:

$\underbrace{oo}$	۱	$\underbrace{oo}$	۱	$\underbrace{oooooo}$	۱	$\underbrace{\quad}$	۱	$\underbrace{oo}$
مسطح		براق		شکری		لیموناد		شکلاتی

ما یک دنباله دودویی ۱۶ رقمی را دقیقاً با ۴ عدد ۱ تشکیل داده‌ایم – یک عنصر B!

این مثال یک نگاشت دو سویی از مجموعه A به مجموعه B را پیشنهاد می‌کند:

یک دو جین نان شیرینی رسم کنید که تشکیل بشود از:

مسطح p و براق g, شکری s, لیمویی L, و شکلاتی C و به این دنباله

$$\underbrace{o \ldots o}_{p} \quad ۱ \quad \underbrace{o \ldots o}_{g} \quad ۱ \quad \underbrace{o \ldots o}_{s} \quad ۱ \quad \underbrace{o \ldots o}_{L} \quad ۱ \quad \underbrace{o \ldots o}_{C}$$

نسبت داده شود.

تابع به دست آمده همیشه ۱۶ ۰ و دقیقاً ۴ تا یک دارد، و بـه ایـن جهـت عضـوی از B اسـت. افزون بر آن، ترسیم یک نگاشت دو سویی است، هر چنین تکه‌ای دقیقاً بوسیله یک ترتیـب از دو جین شیرینی رسم شده است. بنابراین $|A|=|B|$ توسط قانون نگاشت دوسویی!

این قدرت درشت نمایی قانون نگاشت دو سویی را به نمایش می‌گذارد.

قبلاً ثابت کردیم که دو مجموعه بسیار متفاوت عملاً یک اندازه هستند، هر چند که حتی نمی‌دانیم دقیقاً به چه میزان بزرگ هستند. ولی همین که اندازه یک مجموعه را مجسم کنیم، بلافاصله اندازه مجموعه دیگر را بدست خواهیم آورد.

این نگاشت دوسویی ویژه ممکن است به طور هولناکی با نبوغ به نظر برسد اگر قبلاً آن را ندیـده باشید. ولی به طور مبتدی از آن بارها و بارها استفاده خواهید کرد او به زودی به نظرتان پـیش پـا افتاده خواهد آمد.

۲. ۱ دنباله‌ها

قانون نگاشت دو سویی امکان می‌دهد تا یک چیـز را بـا توجـه بـه دیگـری بشـماریم. ایـن یـک استراتژی کلی را ارائه می‌کند: در کار شمارش فقـط چنـد مـورد خـوب عمـل کنیـد و سـپس از نگاشت‌های دو سویی برای شمارش هر چیز دیگری استفاده کنید.

این استراتژی را دنبال خواهیم کرد. به طور ویژه، بواقع در شمارش دنباله‌ها جا خواهیم افتاد. وقتی که بخواهیم اندازه یک مجموعه T را مشخص کنیم، یک نگاشت دوسویی از T به مجموعه‌ای از دنباله‌های S را خواهیم یافت. سپس از دنباله همه فن حریف خود– مهارت در شمارش اسـتفاده خواهیم کرد تا $|S|$ را مشخص کنیم. که بلافاصله $|T|$ را به ما می‌دهد. نیاز داریم که این نظریـه را مادامی که جلو می‌رویم روشن کنیم، و آن کل طرح است!

۲. دو قانون اساسی شمارش

اولین دانه مسائل شمارشی خود را با دو قانون اساسی برداشت خواهیم کرد.

۱. ۲ قانون حاصل‌جمع

لینوس برای خواهر بزرگش لوسی یک سهمیه ۲۰ روزی بد رفتـاری، ۴۰ روز زود رنجـی و ۶۰ روز ترشروئی معین می‌کند. در مدت چند روز لوسی می‌تواند به یک شکل یا دیگری پکر باشـد؟ فرض کنید مجموعه C روزهای بدرفتاری باشد، I روزهـای زود رنجـی باشـد و S ترشـرویی کلی‌اش باشد. در این گونه عبارت‌ها، پاسخ به پرسش، $|C \cup I \cup S|$ است. حالا با فـرض براینکـه

لوسی اجازه دارد هر روز یک بدرفتاری کند، اندازه اتحاد این مجموعه‌ها بـا قـانون حاصـل‌جمـع بدست می‌آید:

قانون ۲ (قانون حاصل جمع). اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعه‌های از هم جدا باشند آنگاه:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

با این حساب، براساس دارایی‌های و بودجه لینوس در نوع رفتار، لوسی می‌تواند پکر باشد برای:

$$|C \cup I \cup S| = |C| + |I| + |S|$$

$$= ۲۰ + ۴۰ + ۶۰$$

$$= ۱۲۰ \text{ روز}$$

توجه داشته باشید که قانون حاصل‌جمع فقط برای اجتماع مجموعه‌های جدا از هم صـادق اسـت. یافتن اندازه اجتماع مجموعه از مسائل جالب توجه و بدرفتار است که بعدها به آن خواهیم رسید.

۲. ۲ قانون حاصل‌ضرب

قانون حاصل‌ضرب، اندازه حاصل‌ضرب مجموعه‌ها را بدست می‌دهد. باز هم به خـاطر بسـپارید که اگر $P_1, P_2, \ldots, P_n$ مجموعه باشند، آنگاه

$$P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

مجموعه‌ای از تمام دنباله‌هاست که اولین عبـارتش از P_1 گرفتـه شـده اسـت، عبـارت دوم از P_2 بیرون کشیده شده و الی آخر.

قانون ۳ (قانون حاصل‌ضرب). اگر $P_1, P_2, \ldots, P_n$ مجموعه باشند، آنگاه:

$$|P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n| = |P_1|.|P_2|\ldots|P_n|$$

برخلاف قانون حاصل‌جمع، قانون حاصل‌ضرب نیازی ندارد که مجموعه‌های $P_1,\ldots P_n$ از هم جدا باشند. برای مثال، فرض کنید که یک رژیم غذایی، روزانه متشکل از یک صبحانه کـه از مجموعـه B است، یک ناهار از مجموعه l و یک شام از مجموعه D باشد:

B = {ساندویچ سبک تخم مرغ، گوشت و تخم مرغ و نان شیرینی، دوریتوس}

L = {همبرگر و سیب زمینی، سالاد فصل، دوریتوس}

D = {ماکارونی – پیتزا، کرهٔ منجمد، پاستا، دوریتوس}

آنگاه $B \times L \times D$ مجموعه‌ای از تمام رژیم غذایی روز است. اینجا چند نمونه عضوهای داریم:

(ساندویچ سبک تخم مرغ، گوشت و سیب زمینی، پیتزا)

(گوشت و تخم مرغ، سالاد فصل، پاستا)

(دوریتوس، دوریتوس، کره منجمد)

قانون حاصل‌ضرب به ما می‌گوید که چه تعداد رژیم غذایی روزانه ممکن می‌شوند:

$$\begin{aligned} |B \times L \times D| &= |B|.|L|.|D| \\ &= ۴.۳.۵ \\ &= ۶۰ \end{aligned}$$

۳. ۲ ترکیب قوانین

تعدادی مسائل شمارشی را می‌توان با یک قانون حل کرد. اغلب راه حل یک مسأله از حاصل‌جمع، حاصل‌ضرب، نگاشت دوسویی و دیگر روش‌هاست.

بیائید به چندین مثال دیگر که بیشتر از یک قانون را استفاده می‌کند، نگاه کنیم.

کلمه‌های عبور

قوانین حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب بر روی هم برای حل مسائل مربوط به کلمه‌های عبور، شماره تلفن‌ها، لوح پروانه کاری سفید مفید هستند. برای مثال، در یک سیستم رایانه‌ای مشخص، یک کلمه عبور معتبر دنباله‌ای از شش تا هشت نماد است. اولین نماد باید یک حرف باشد (که می‌تواند حرف بزرگ یا حرف کوچک باشد) و باقی مانده نمادها هم می‌توانند حروف و هم رقم باشند. چند کلمه عبور مختلف، ممکن می‌شوند؟

بیائید دو مجموعه تعیین کنیم، مطابق با نمادهای معتبر در اول کار و موقعیت‌های بعدی در کلمه عبور.

$$F = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\}$$

$$S = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, ۰, ۱, \ldots, ۹\}$$

در این عبارت‌ها، مجموعه تمام کلمه‌های عبور عبارت است از:

$$\left(F \times S^{۵}\right) \cup \left(F \times S^{۶}\right) \cup \left(F \times S^{۷}\right)$$

با این حساب، مجموعه کلمه‌های عبور شش حرفی عبارتند از $F\times S^{5}$ مجموعه کلمه‌های عبور هفت حرفی عبارتند از $F\times S^{6}$ و مجموعه کلمه‌های عبور هشت حرفی عبارتند از $F\times S^{7}$. از آنجا که اینها جدا از هم هستند، می‌توانیم قانون حاصل‌جمع را به کار بگیریم و تعداد کل کلمه‌های عبور احتمالی را به شکل زیر شمارش کنیم:

قانون حاصل جمع $\quad \left|\left(F\times S^{5}\right)\cup\left(F\times S^{6}\right)\cup\left(F\times S^{7}\right)\right|=\left|F\times S^{5}\right|+\left|F\times S^{6}\right|+\left|F\times S^{7}\right|$

قانون حاصل ضرب $\quad =|F|.|S|^{5}+|F|.|S|^{6}+|F|.|S|^{7}$

$$=52.62^{5}+52.62^{6}+52.62^{7}$$

کلمه‌های عبور مختلف $\approx 1.8\times 10^{14}$

زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

در یک مجموعه X، با n عضو چند زیر مجموعه مختلف وجود دارد؟ برای مثال، مجموعه $x=\{x_1,x_2,x_3\}$ هشت زیر مجموعه متفاوت دارد:

$\{\ \}\quad \{x1\}\quad \{x2\}\quad \{x1,x2\}\quad \{x3\}\quad \{x1,x3\}\quad \{x2,x3\}\quad \{x1,x2,x3\}$

یک نگاشت دو سویی طبیعی از زیر مجموعه‌های X به دنبا له‌هایی با n عضو وجود دارد. فرض کنید $x_1,x_2,\ldots,x_n$ اجزای X باشند. سپس یک زیر مجموعه ویژه X به دنباله $(b_1,\ldots b_n)$ تصویر می‌شود، $b_i=1$ اگر و فقط اگر x_i در آن زیر مجموعه وجود داشته باشد. برای مثال، اگر

$n=10$، آنگاه زیر مجموعه $\{x_2, x_3, x_5, x_7, x_{10}\}$ رسم می‌شود به یک دنباله ۱۰ رقمی به شکل زیر تصویر می‌شود:

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{زیر مجموعه:} & \{ & & x_2, & & x_3, & & x_5, & & x_7, & & x_{10}\} \\ \text{دنباله:} & \{0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0, \; 1\} \end{array}$$

ما فقط از یک نگاشت دو سویی برای تبدیل مسئله اصلی به پرسش درباره دنباله‌ها– دقیقاً مطابق با نقشه استفاده کرده‌ایم! حالا اگر به دنباله پاسخ بدهیم، پس مسئله اصلی خود را هم به خوبی حل کرده‌ایم.

ولی چند دنباله n تایی متفاوت وجود دارند؟ برای مثال، ۸ دنباله ۳ تایی وجود دارد:

$$\begin{array}{cccc} (0,0,0) & (0,0,1) & (0,1,0) & (0,1,1) \\ (1,0,0) & (1,0,1) & (1,1,0) & (1,1,1) \end{array}$$

بسیار خوب، می‌توانیم مجموعه کلیه دنباله‌های n تایی را به صورت مجموعه‌های حاصل‌ضرب بنویسیم:

$$\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n\text{مرتبه}}=\{0,1\}^n$$

پس قانون حاصل‌ضرب این پاسخ را بدست می‌دهد:

$$\begin{aligned} \left|\{0,1\}^n\right| &= \left|\{0,1\}\right|^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

معنی‌اش این است که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی X هم 2^n می‌شود. این پاسخ را در مدت کوتاهی به کار خواهیم برد.

۳. تابع‌های بیشتر: تابع‌های یک به یک و تابع‌های پوشا

نگاشت‌های دوسویی یک به یک و پوشا هستند، که از آنها ابزاری مطمئن برای شمارش دقیق می‌سازد. در یادداشت‌های پیشین مشاهده کرده‌ایم که پوشاها و یک به یک‌ها هر کدام رابطه مشخصی بین اندازه مجموعه‌ها ایجاد می‌کنند:

قانون ۴ قانون نگاشت.

۱- اگر $f : X \to Y$ پوشا باشد آنگاه $|X| \geq |Y|$

۲- اگر $f : X \to Y$ یک به یک باشد آنگاه $|X| \leq |Y|$

۳- اگر $f : X \to Y$ نگاشت دوسویی باشد آنگاه $|X| = |Y|$

۱. ۳ اصل لانه کبوتری

به یک چیستان قدیمی توجه کنید:

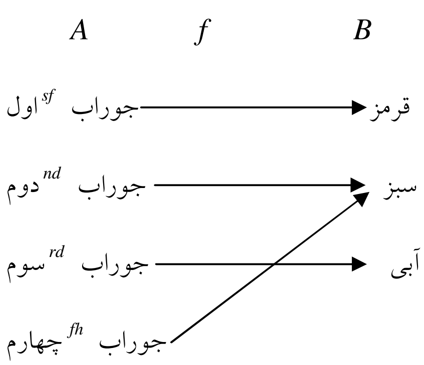
در کشویی درون یک اتاق تاریک، چندین جوراب قرمز، سبز و آبی وجود دارد چه تعداد جوراب را باید از آنجا بیرون بیاورید تا مطمئن شوید یک جفت هم رنگ دارید؟

برای مثال، کشیدن سه جوراب کافی نیست، چه بسا یک لنگه قرمز، یک لنگه سبز و یک لنگه آبی بیرون آوردید. راه حل در اصل لانه کبوتری نهفته است، که نامی صمیمانه برای تناقض قسمت (۲) قانون نگاشت به حساب می‌رود. بیائید آنرا بنویسیم:

اگر $|X| > |Y|$، پس هیچ تابعی $f : X \to Y$ یک به یک نیست و حالا آن را دوباره بنویسید تا کلمه "یک به یک" را حذف کنید.

قانون ۵ (اصل لانه کبوتر). اگر $|X|>|Y|$، پس برای هر تابع $f:X\to Y$ دو عنصر متفاوت X وجود دارد که به یک عنصر Y رسم شده‌اند.

شاید ارتباط این گزاره مجرد ریاضی با انتخاب جوراب در شرایط نور ضعیف آشکار نباشد. با این وجود، فرض کنید A مجموعه جورابهایی باشد که شما بیرون می‌کشید، فرض کنید B مجموعه رنگهای قابل دسترس باشد و فرض کنید f هر جوراب را به رنگ آن رسم می‌کند. اصل لانه کبوتری می‌گوید که اگر $|A|>|B|=۳$ آنگاه باید حداقل دو عضو A (یعنی که، حداقل دو جوراب) به یک عضو B (یعنی که، رنگ یکسان) تصویر شود. برای مثال، یک تصویر احتمالی چهار جوراب به سه رنگ در پائین نمایش داده می‌شود.



بنابراین، چهار جوراب برای حصول اطمینان از یک جفت هماهنگ کافی است. جای شگفتی نیست، که اصل لانه کبوتری غالباً عبارت‌هایی از کبوتر را شرح می‌دهد:

اگر هر کبوتر درون یک لانه کبوتر برود و تعداد کبوترها بیشتر از لانه‌ها باشد، پس حداقل دو کبوتر باید به درون یک لانه بروند.

در این حالت، کبوترها مجموعه A را تشکیل می‌دهند، لانه کبوترها مجموعه B و f توصیف می‌کند هر کبوتر به کدام لانه می‌پرد.

ریاضی‌دانان کاربردهای زیادی درباره اصل لانه کبوتری را مطرح کرده‌اند. اگر یک کتاب آشپزی که راه و روش چنین استدلال‌هایی را می‌گفت وجود داشت، به شما تقدیم می‌کردیم، متأسفانه، چنین کتابی وجود ندارد. یک کمک مفید، با این وجود: وقتی که درصدد حل یک مسئله با اصل لانه کبوتری هستید، کلید مورد نظر این است که به روشنی سه مورد را تشخیص بدهید:

۱- مجموعه A (کبوترها)

۲- مجموعه B (لانه‌های کبوتر)

۳- تابع f (قانون اختصاص کبوترها به لانه‌های کبوتر)

موها و سرها

تعدادی تعمیم برای اصل لانه کبوتری وجود دارند. برای مثال:

قانون ۶ (اصل لانه کبوتری تعمیم یافته). اگر $|X| > k.|Y|$، آنگاه هر تابع $f : X \to Y$ حداقل $k+1$ عضوهای مختلف X را به یک عنصر Y مربوط می‌کند.

برای مثال، اگر دو نفر را به صورت اتفاقی انتخاب کنید، مطمئناً تا حد زیادی غیر قابل باور است که به یک میزان مو روی سر داشته باشند. با این وجود، در شهر به یاد ماندنی بوستون ماساچوست سه نفر هستند که دقیقاً به یک تداد موی سر دارند! البته، در بوستون آدم کچل بسیار است و همگی صفر مو دارند. ولی داریم درباره مردم غیرطاس حرف می‌زنیم.

بوستون تقریباً حوالی ۵۰۰,۰۰۰ نفر غیرطاس دارد و تعداد موهای روی سر یک نفر حداکثر ۲۰۰,۰۰۰ تار مو است. فرض کنید A مجموعه افراد غیرطاس در بوستون باشد، فرض کنید $B=\{۱,\ldots,۲۰۰/۰۰۰\}$ و فرض کنید که f یک شخص را به تعداد موهای سر خود تصویر می‌کند. از آنرو که $|A|>۲|B|$ و اصل تعمیم یافته لانه کبوتری مبین آن است که حداقل سه نفر تعداد مو یکسان را دارند. نمی‌دانیم چه کسانی هستند ولی می‌دانیم که وجود دارند!

زیر مجموعه‌هایی با یک حاصل‌جمع

قبلاً بیان ثابت کردیم که دو زیر مجموعه اعداد ۲۵ رقمی که در صفحه اول فهرست شده بودند دارای یک حاصل‌جمع هستند. این هم عملاً از اصل لانه کبوتری تبعیت می‌کند. فرض کنید A مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های ۹۰ عدد در لیست باشد. حالا حاصل جمع هر زیر مجموعه‌ای از این اعداد حداکثر ۹۰×۱۰^{۲۵} است. زیرا که فقط ۹۰ عدد وجود دارد و هر عدد ۲۵ رقمی کمتر از $۱۰^{۲۵}$ است. بنابراین فرض کنید B مجموعه اعداد صحیح $\{۰,۱,\ldots,۹۰.۱۰^{۲۵}\}$ باشد. فرض کنید f هر زیر مجموعه اعداد (در A) را به حاصل‌جمع‌هایش (در B) تصویر می‌کند.

ثابت کرده‌ایم که یک مجموعه با n عضو ۲^n زیر مجموعه متفاوت دارد بنابراین:

$$|A|=۲^{۹۰}$$

$$\geq ۱.۲۳۷\times۱۰^{۲۷}$$

از سوی دیگر

$$|B|=۹۰.۱۰^{۲۵}+۱$$

$$\leq 0.901\times 10^{27}$$

هر دو کمیت خیلی بزرگند، ولی $|A|$ یک کم بزرگتر از $|B|$ است. معنی‌اش آن است که f حداقل دو عضو از A را به یک عضو B رسم می‌کند.

به بیانی دیگر، با توجه به اصل لانه کبوتری، دو زیر مجموعه متفاوت باید یک حاصل‌جمع را داشته باشند!

توجه داشته باشید که این برهان هیچ علامتی دال بر اینکه کدام یک از دو زیرمجموعه اعداد دارای یک حاصل‌جمع هستند، در اختیار شما قرار نمی‌دهد. به این نوع ناامید کننده استدلال، برهان غیرسازنده می‌گویند.

٤. قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته

درک می‌کنیم که در این ترم همه به سختی تلاش کرده‌اند و در نظر داریم جایزه‌هایی برای تعداد از کارهای جداً استثنایی تخصیص دهیم. در اینجا چند نمونه از گروه بندی‌های احتمالی را می‌آوریم:

مجموعه‌هایی با حاصل‌جمع‌های مجزا از زیرمجموعه‌ها

چگونه می‌توانیم مجموعه‌ای از n اعداد مثبت صحیح درست کنیم به طوری که تمام زیر مجموعه‌هایش حاصل‌جمع‌های مجزا از هم داشته باشند؟ یک راه آن استفاده از مضارب دو است:

$\{1,2,4,8,16\}$

این روش به قدری طبیعی است که هر کسی تردید می‌کند که همه چنین مجموعه‌هایی باید با تعداد بزرگتری درگیر باشند. (برای مثال، می‌توانیم مطمئناً ۱۶ را با ۱۷ جا به جا کنیم ولی با ۱۵ نمی‌توانیم). بطور قابل توجهی مثال‌هایی وجود دارند که اعداد کوچکتر را درگیر می‌کنند. در اینجا یکی هست:

$\{۶,۹,۱۱,۱۲,۱۳\}$

یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان قرن، پاول اردوش، در سال ۱۹۳۱ حدس زد که چنین مجموعه‌هایی که اعداد کوچکتر را به طور معناداری درگیر کنند وجود ندارد. به طور مشخص‌تر، نظر داد که بزرگترین عدد باید $> c2^n$ برای عدد ثابت $c > 0$ باشد. او پانصد دلار به هر کسی که نظرش را ثابت کند یا رد کند می‌پردازد ولی مسئله همچنان لاینحل باقی است.

بهترین نقد رسمی مشخص کردیم که امتحان کتاب بسته بود. بر روی جلد صفحه اول، یکی از نامزدهای بزرگ دریافت جایزه نوشت "هیچ کتابی وجود ندارد."

جایزه پرسش غیر ناشیانه "بسیار خوب" جوراب چپ، جوراب راست و شلوار در یک ضدزنجیر قرار دارند، ولی چگونه – ولو با کمک گرفتن – می‌توانستم هر سه را یکباره بپوشم؟

بهترین گزاره همیاری توسط دانشجویی که نوشت "به تنهایی انجام دادم" در امتحان ۱ به ظهور رسید.

به چند روش می‌توان فرضاً، سه جایزه مختلف را به n نفر ارائه نمود؟ این آسان است که با استفاده از استراتژی ترجمه مسئله درباره جایزه‌ها ،به مسئله دنباله‌ها، به پاسخ رسید. فرض کنید p مجموعه‌ای از افراد در ۶.۰۴۲ باشد. آنگاه یک نگاشت دوسویی از روش‌های اعطای جوایز سه‌گانه به مجموعه $p^۳ ::= p\times p\times p$ وجود دارد، بویژه ، واگذاری جوایز:

نفر x جایزه ۱# را می‌برد، نفر y جایزه‌ی۲# و نفر سوم z جایزه‌ی ۳# را می‌برد.

به دنباله (x, y, z) تصویر می‌شود. با توجه به قانون حاصل‌ضرب، داریم $\left|p^۳\right| = \left|p\right|^۳ = n^۳$.

بنابراین $n^۳$ راه برای اعطای جوایز به کلاسی با n نفر وجود دارد.

ولی چه می‌شود اگر سه جایزه را باید به دانشجویان متفاوت اعطا کرد؟ مثل قبل، می‌توانیم واگذاری را رسم کنیم.

(فرد x جایزه ۱# را می‌برد. فرد y جایزه‌ی ۲# و فرد z جایزه‌ی ۳# را می‌برد.)

سه تایی $(x, y, z) \in P^۳$. ولی این تابع دیگر به هیچ وجه نگاشت دوسویی نیست. برای مثال، هیچ واگذاری معتبری به سه نفر (دایو، دایو، بکی) رسم نمی‌شود چون که دایو مجاز نیست دو جایزه را دریافت کند. با این وجود یک نگاشت دوسویی از واگذاری جایزه به این مجموعه وجود دارد:

$S = \{(x, y, z) \in p^۳ \mid x, y, z$ افراد مختلف هستند$\}$

و مسئله اصلی را به یک مسئله شمارش دنباله‌ها تنزل می‌دهیم. متأسفانه، قانون حاصل‌ضرب در شمارش دنباله‌هایی اینچنین مفید نیست زیرا ورودی‌ها به دیگری بستگی دارند؛ بویژه، همگی باید متفاوت باشند. با این وجود، ابزاری کمی تیزتر فوت‌وفن را انجام می‌دهد.

قانون ۷ (قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته) فرض کنید S مجموعه‌ای از دنباله‌های طول k باشد. اگر داشته باشیم:

- n_1 درایه‌ی ممکن مرحله اول
- n_2 درایه‌ی ممکن مرحله دوم وابسته به درایه اول
- n_3 درایه‌های ممکن مرحله سوم که وابسته به درایه‌های مرحله‌ی اول و دوم

آنگاه:

$$|S| = n_1 . n_2 . n_3 \ldots n_k$$

در مثال جایزه‌ها، S شامل دنباله‌های (x, y, z) می‌شود. n روش برای انتخاب x به عنوان دریافت کننده جایزه ۱# وجود دارد. برای هر کدام از این‌ها، $n-1$ روش برای انتخاب y به عنوان دریافت کننده جایزه ۲# وجود دارد از آنرو که همه افراد به جز شخص x واجد شرایط هستند. برای هر ترکیب x و y, $n-2$ روش برای انتخاب z دریافت کننده جایزه ۳# وجود دارد، زیرا که همه افراد به جز x و y واجد شرایط هستند. با این حساب، طبق قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته، داریم

$$|S| = n.(n-1).(n-2)$$

تعداد روش‌هایی که می‌توان ۳ جایزه را به افراد مختلف واگذار نمود.

۱. ۴ دلارهای معیوب

به یک دلار وقتی معیوب می‌گویند که یک رقم در سلسله اعداد ۸ رقمی بیش از یک بار به کار رود.

اگر به کیف پولی‌تان نگاهی بکنید، از کشف اینکه دلارهای معیوب خیلی به هم شبیه‌اند غمگین خواهید شد. در واقع، دلارهای نامعیوب چقدر به هم شبیه‌اند؟ با فرض براینکه پخش ارقام ردیف اعداد اغلب همگی به طور برابر اتفاق می‌افتد، این پرسش را با شمارش پاسخ می‌دهیم:

$$\text{کسر دلارهایی که غیر معیوب هستند} = \frac{\text{سریال دلار با ارقام مختلف}}{\text{تمام سریال‌ها دلار}}$$

بیائید در ابتدا به مخرج کسر توجه کنیم. در اینجا هیچ منع و محدودیتی وجود ندارد؛ ۱۰ رقم برای اولین مکان، ۱۰ رقم برای دومین مکان، ۱۰ رقم برای سومین مکان و به همین ترتیب امکان پذیر است. بنابراین، تعداد اعداد ۸ رقمی با نظر به قانون حاصل‌ضرب برابر است با $۱۰^{۸}$.

بعد، بیائید به صورت کسر باز گردیم. فعلاً مجاز نیسیتم که از یک رقم دوبار استفاده کنیم. بنابراین همچنان ۱۰ رقم برای اولین مکان وجود دارد ولی ۹ رقم برای مکان دوم، ۸ رقم برای مکان سوم و الی آخر. بنابراین، با توجه به قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته،

$$۱۰.\ ۹.\ ۸.\ ۷.\ ۶.\ ۵.\ ۴.\ ۳ = \frac{۱۰!}{۲}$$

$$= ۱,۸۱۴,۴۰۰$$

عدد با ارقام مختلف وجود دارد. با اتصال این نتایج به معادله بالا بدست می آوریم :

$$\text{کسر دلارهایی که غیرمعیوب هستند} = \frac{۱,۸۱۴,۴۰۰}{۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰}$$

$$= ۱/۸۱۴۴\%$$

۲. ٤ مسئله شطرنج

به چند روش مختلف می‌توانیم یک سرباز (p)، یک اسب (k) و یک فیـل (b) را روی صـفحه شطرنج قرار دهیم به طوری که هیچ دو مهره‌ای در یک ردیف یا یک ستون نباشـد؟ یـک نمـایش معتبر در پائین سمت چپ نشان داده شده است و یک نمایش نامعتبر در سمت راسـت نشـان داده شده است.

				p			
		b			k		

نا ممکن

				k			
	b						
					p		

ممکن

ابتدا، این مسئله مهره‌های شطرنج را به پرسش درباره دنبالـه‌هـا تصـویر مـی‌کنـیم. یـک نگاشـت دوسویی از تصویرهای صفحه شطرنج به دنباله‌ها وجود دارد.

$$\left(r_p, c_p, r_k, c_k, r_b, c_b\right)$$

در جایی که r_p, r_k و r_b ردیف‌های متفاوت هستند و c_p, c_k و c_b ستون‌های متفاوت هستند. بویژه r_p ردیف پیاده است، c_p ستون پیاده، r_k ردیف اسب، والی آخر. حالا با استفاده از قانون حاصل‌ضرب تعمیم یافته می‌توانیم تعداد چنین دنباله‌هایی را شمارش کنیم:

- r_p یکی از ۸ ردیف است.
- c_p یکی از ۸ ستون است.
- r_k یکی از ۷ ردیف (هر کدام به غیر از r_p)
- c_k یکی از ۷ ستون (هرکدام به غیر از c_p)
- r_b یکی از ۶ ردیف (هرکدام به غیر از r_p یا r_k)
- c_b یکی از ۶ ستون (هر کدام به غیر از c_p یا c_k است)

با این حساب، تعداد کل تجسم‌ها $(۸.۷.۶)^۲$ است.

۳. ٤ (جایگشت)

جایگشت از یک مجموعه S دنباله‌ای است که حاوی هر عضو S دقیقاً یکبار است. برای مثال، در اینجا همه جایگشت‌های مجموعه $\{a,b,c\}$ را آورده‌ایم:

$$(a,b,c) \qquad (a,c,b) \qquad (b,a,c) \qquad (b,c,a) \qquad (c,a,b) \qquad (c,b,a)$$

چه تعداد جایگشت از یک مجموعه n عضوی وجود دارند؟ خوب، تعداد n گزینه برای عضو اول وجود دارد. برای هر کدام از اینها، $n-۱$ گزینه باقیمانده برای عضو دوم وجود دارد.

برای هر ترکیب دو عضو اول، $n-۲$ راه برای انتخاب عضو سوم وجود دارد و الی آخر. پس به این ترتیب در کل این تعداد

$$n.(n-۱).(n-۲)\ldots ۳.۲.۱=n!$$

جایگشت از یک مجموعه n عضوی وجود دارد. بویژه، این فورمول می‌گوید که $۳!=۶$ جایگشت متعلق به مجموعه سه عضوی $\{a,b,c\}$ وجود دارد که همان عددی است که در بالا به آن رسیدیم.

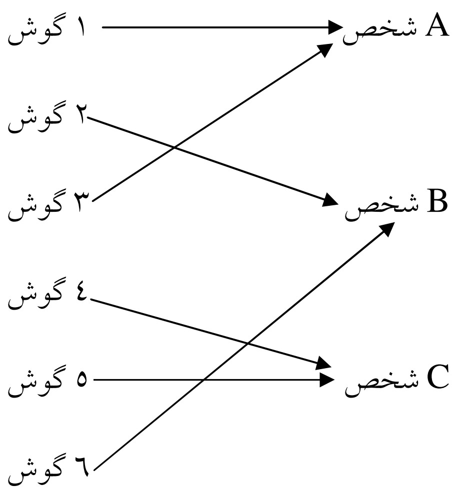
جایگشت‌ها، دوباره در این بخش به تعداد ۱.۶ بازیلیون دفعه مطرح می‌شوند. در واقع، جایگشت‌ها دلیل این هستند که چرا غالباً فاکتوریل مطرح می‌شود و چرا به شما تقریب استرلینگ را یاد دادیم:

$$n!\sim\sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

۵. قانون تقسیم

می‌توانیم تعداد افراد موجود در یک اتاق را با شمارش گوشها انجام دهیم و تقسیم بر دو کنیم. یا می‌توانیم تعداد انگشتان را بشماریم و تقسیم بر ۱۰ کنیم. یا می‌توانیم انگشت‌های دست و پا را بشماریم و تقسیم بر ۲۰ کنیم. (احتمالاً بعضی‌ها یک انگشت کم یا یک گوش اضافی دارند، ولی بیائید فعلاً در این باره نگران نباشیم) این مشاهدات به یک قانون شمارشی مهم می‌انجامند.

یک k به ۱ تابع دقیقاً k عضو از دامنه را به یک عضو برد تصویر می‌کند. برای مثال تابع تصویر هر گوش به صاحبش دو به یک است:



به همین طریق، تابع رسم هر انگشت به صاحبش عبارت است از۱۰ به ۱ و تابع رسم هر انگشت دست یا پا به صاحبش از قرار۲۰ به ۱ است.

حالا به همان شکل که نگاشت دوسویی مدل می‌سازد که دو مجموعه یکسان هستند، یک تابع k به ۱ دلالت می‌کند که دامنه k مرتبه از هم‌دامنه وسیع‌تر است:

قانون ۸ (قانون تقسیم).

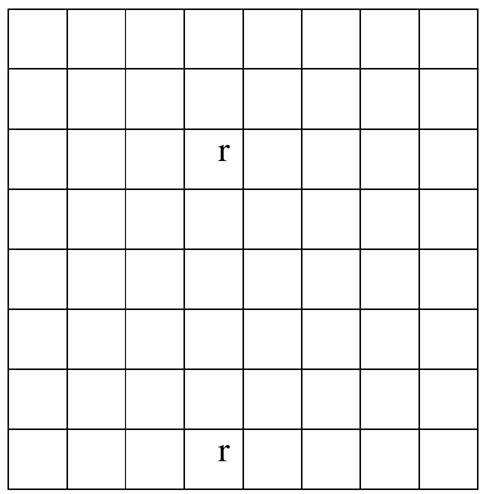
اگر $f : A \to B$ یک نگاشت kبه ۱ باشد آنگاه $|A| = k.|B|$

فرض کنید A مجموعه گوش‌ها و B مجموعه اشخاص درون اتاق است از آنرو که می‌دانیم یک تصویر ۲ به ۱ از گوش‌ها به افراد وجود دارد، قانون تقسیم می‌گوید که $|A| = ۲.|B|$ یا، به طور هم ارز، $|B| = \frac{|A|}{۲}$. بنابراین تعداد اشخاص نصف تعداد گوش هاست.

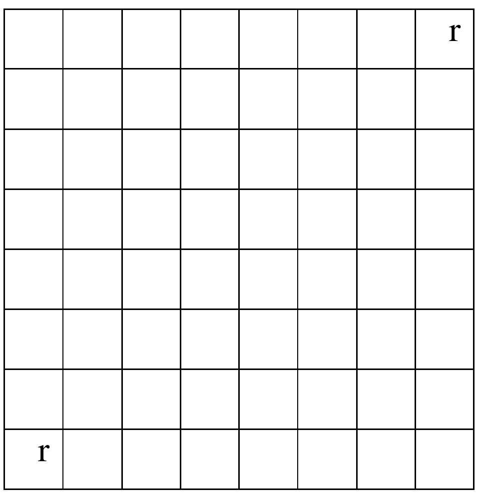
حالا چه بسا به نظر برسد که این راه احمقانه‌ای برای شمارش افراد باشد. ولی، در کمال تعجب، بسیاری از مسائل شمارشی با شمارش هر نمونه چندین بار بسیار آسان‌تر شده‌اند. سپس با استفاده از قانون تقسیم پاسخ را تصحیح می‌کنند. بیائید به چند نمونه نگاه کنیم.

۱. ۵ مسئله دیگر شطرنج

به چند روش مختلف می‌توانید دو مهره رخ یکسان را روی صفحه شطرنج قرار دهید تا در یک ردیف یا ستون به هم بر نخوردند. پیکربندی معتبر در سمت چپ پائین و پیکربندی نامعتبر سمت راست نشان داده شده‌اند.



پیکربندی نامعتبر



پیکربندی معتبر

فرض کنید A مجموعه تمام دنباله‌هایی باشد

$$(r_1, c_1, r_2, c_2)$$

که r_1 و r_2 ردیف‌های متفاوت هستند و c_1 و c_1 ستون‌های متفاوت هستند. فرض کنید B مجموعه تمام پیکربندی‌های معتبر رخ باشد. یک تابع طبیعی f از مجموعه A به مجموعه B

وجود دارد؛ بویژه، f دنباله (r_1,c_1,r_2,c_2) را به یک پیکربندی با یک رخ در ردیف r_1، ستون c_1 و رخ دیگر در ردیف r_2، ستون c_2 تصویر می‌کند.

ولی حالا یک گره در کاراست. به این دنباله‌ها توجه کنید:

$$(۱,۱,۸,۸) \qquad \text{و} \qquad (۸,۸,۱,۱)$$

دنباله اول یک پیکربندی با یک رخ در زاویه پائین سمت چپ و یک رخ در زاویه بالای سمت راست رسم می‌کند. دنباله دوم یک پیکربندی با یک رخ در زاویه بالا سمت راست و یک رخ در زاویه پائین چپ ترسیم می‌کند. مسئله این است که آنها دو روش متفاوت برای تشریح همان پیکربندی هستند! در واقع، این وضع قرار گرفتن در سمت چپ نمودار بالا به نمایش در آمده است.

به صورت کلی‌تر، تابع f دقیقاً دو دنباله را به یک صفحه پیکربندی رسم می‌کند؛ یعنی اینکه f یک تابع ۲ به ۱ است. پس با توجه به قانون خارج قسمت، $|A|=۲.|B|$ با تنظیم دوباره گزاره‌ها به دست می‌آید:

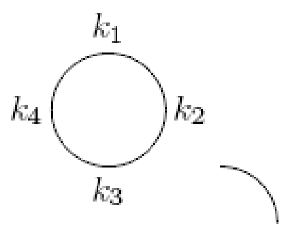
$$|B|=\frac{|A|}{۲}$$

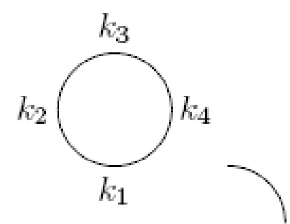
$$=\frac{(۸.۷)^۲}{۲}$$

در خط دوم، با استفاده از قانون حاصل‌ضرب تعمیم شده درست مثل مسئله پیشین شطرنج اندازه A را شمارش کرده‌ایم.

۲. ۵ شوالیه‌های میزگرد

آرتور شاه به چند روش می‌تواند n شوالیه مختلف را بر سر میز گردش بنشاند؟ دو جایگاه هم‌ارز پنداشته می‌شوند اگر یکی را بتوان با چرخش از دیگری بدست آورد. برای مثال، دو چیدمان زیـر با هم هم‌ارز هستند:

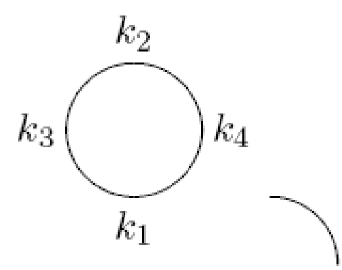




فرض کنید A کلیه جایگشت‌های شوالیه‌ها باشد و فرض کنیـد B مجموعـه‌ای از تمـام جاهـای احتمالی چیدمان پیرامون میز باشد. می‌توانیم هر جایگشت در مجموعه A را به یک چیدمان دوار در مجموعه B با نشاندن اولین شوالیه در جایگشت هر کجا که باشد رسم کنیم دومین شـوالیه را سمت چپ او، سومین شوالیه را سمت چپ نفر دوم و به همین ترتیب در تمام دور میز.

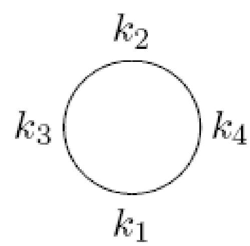
برای مثال:

$$(k_2, k_4, k_1, k_3) \longrightarrow$$



این نمودار عملاً یک تابع n به ۱ از A به B است، از آنجا که تمام جابه جایی‌های حلقوی دنباله‌های اصلی به یک چیدمان جایگاه تصویر می‌شوند. در مثال، $n=۴$ دنباله‌های گوناگون زیر به یک چیدمان جایگاه تصویر می‌شوند:

$$\begin{array}{l} (k_2, k_4, k_1, k_3) \\ (k_4, k_1, k_3, k_2) \\ (k_1, k_3, k_2, k_4) \\ (k_3, k_2, k_4, k_1) \end{array} \quad \longrightarrow$$



بنابراین، با توجه به قانون تقسیم، تعداد چیدمان جایگاه مدور عبارت است از:

$$|B| = \frac{|A|}{n}$$

$$= \frac{n!}{n}$$

$$= (n-۱)!$$

توجه کنید $|A| = n!$ از آنرو که $n!$ جایگشت‌های n شوالیه در کاراست.

٦. شمول و عدم شمول

اتحادی از مجموعه‌ها به چه بزرگی است؟ بـرای مثـال، فـرض کنیـد ٦٠ ریاضـی‌دان کلـه گنـده ۲۰۰استاد اقتصاد و ۴۰ استاد فیزیک داریم. در این سه دپارتمان چند استاد وجـود دارنـد؟ فـرض کنید M مجموعه استادهای ریاضی باشد، E مجموعه استادهای اقتصاد و P مجموعه استادهای

فیزیک. در این عبارت‌ها، در جستجوی $|M \cup E \cup P|$ هستیم. قانون حاصل‌جمع می‌گوید که اندازه اتحاد مجموعه‌های جدا از هم حاصل‌جمع اندازه‌های آنهاست:

(اگر M، E و P از هم جدا باشند) $|M \cup E \cup P| = |M| + |E| + |P|$

با این وجود، مجموعه‌های M، E و P ممکن است از هم جدا نباشند. برای مثال، ممکن است دانشجویی باشد که در هر دو رشته ریاضی و فیزیک به استادی برسد. چنین دانشجویی دوبار در سمت راست این معادله به حساب آورده می‌شود، یک بار به عنوان عضوی از M و یک بار به عنوان عضوی از P. وضع بدتر، ممکن است یک استاد– سه گانه که سه مرتبه در سمت راست معادله شمارش می‌شود وجود داشته باشد!

آخرین قانون شمارش ما اندازه اتحاد مجموعه‌هایی که ضرورتاً جدا از هم نیستند را مشخص می‌سازد. قبل از اینکه آن قانون را بیان کنیم، بیائید با توجه به چند مورد ویژه آسان‌تر مقداری کشف و شهود کنیم: فقط اتحاد دو یا سه مجموعه.

۱. ٦ اجتماع دو مجموعه

برای دو مجموعه، $S1$ و $S2$، قانون اصل شمول و عدم شمول این است که اندازه اتحادشان عبارت است از:

$$|S1 \cup S2| = |S1| + |S2| - |S1 \cap S2| \qquad (1)$$

به طوری شهودی، هر عضو S_1 به حساب عبارت اول گذاشته شده و هر عضو S_2 به حساب عبارت دوم گذاشته شده است. عضوهای هر دوی S_1 و S_2 دوبار حساب شده‌اند – یک بار در عبارت اول و یک بار در عبارت دوم. این شمارش مضاعف بوسیله عبارت نهایی تصحیح می‌شود.

می‌توانیم معادله (۱) را به طور محکمی با استفاده از قانون حاصل‌جمع تعدادی از زیر مجموعه‌های $S_1 \cup S_2$ به اثبات برسانیم. به عنوان قدم اول، می‌بینیم که در هر دو مجموعه فرضی، T و S، می‌توانیم S را به مجموعه‌های جدا از هم متشکل از اعضاء موجود در S که در T نیستند و آن عضوهایی هم که در S و هم در T هستند تجزیه کنیم. یعنی که، S اجتماع مجموعه‌های جدا از هم $S-T$ و $S \cap T$ است. بنابراین با توجه به قانون حاصل‌جمع داریم

$$|S| = |S-T| + |S \cap T|.$$

و بنابراین

$$|S-T| = |S| - |S \cap T|. \qquad (۲)$$

اینک $S_1 \cup S_2$ را به سه مجموعه جدا از هم تجزیه می‌کنیم:

$$S_1 \cup S_2 = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1) \cup (S_1 \cap S_2)$$

حالا داریم

$$|S_1 \cup S_2| = |(S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1) \cup (S_1 \cap S_2)|. \qquad \text{(از (۳))}$$

$$= |S_1 - S_2| + |S_2 - S_1| + |S_1 \cap S_2| \qquad \textbf{(قانون حاصل‌جمع)}$$

$$= (|S_1| - |S_1 \cap S_2|) + (|S_2| - |S_1 \cap S_2|) + |S_1 \cap S_2|) \qquad \text{از (۲)}$$

$$= |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2 \qquad \text{(جبر)}$$

۲. ٦ اجتماع سه مجموعه

بنابراین چه تعداد دانشجو در دپارتمان‌های ریاضی، اقتصاد و فیزیک وجود دارند؟ به سخن دیگر، $|M \cup E \cup P|$ چیست اگر:

$$|M| = ۶۰$$

$$|E| = ۲۰۰$$

$$|P| = ۴۰$$

اندازه یک اجتماع سه مجموعه توسط یک فورمول بسیار بدرفتاری‌تر اصل شمول و عدم شمول ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = & |S_1| + |S_2| + |S_3| \\ & - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| \\ & + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| \end{aligned}$$

به صورت جالب توجهی گزاره سمت راست برای هر عضو اجتماع S_1, S_2 و S_3 دقیقاً یک مرتبه به حساب می‌آید. برای مثال، فرض کنید که x عضوی از هر سه مجموعه است.

سپس x سه مرتبه شمارش (توسط عبارتهای $|S_1|, |S_2|, |S_3|$) می‌شود و سه مرتبه تفریق می‌شود (توسط عبارت های $|S_1 \cap S_2|, |S_1 \cap S_3|, |S_2 \cap S_3|$) و سپس یکبار دیگر توسط عبارت $|S_1 \cap S_2 \cap S_3|$ شمارش می‌شود. تأثیر ناب در این است که x فقط یک بار شمارش می‌شود.

بنابراین بدون دانستن اندازه نقاط مشترک مختلف نمی‌توانیم به سئوال اصلی پاسخ بدهیم.

بیائید فرض کنیم که وضعیت چنین است:

استاد مضاعف	اقتصاد– ریاضی	۴
استاد مضاعف	فیزیک– ریاضی	۳
استاد مضاعف	فیزیک– اقتصاد	۱۱
	استاد سه گانه	۲

سپس $|M \cap E| = ۴+۲, |M \cap P| = ۳+۲, |E \cap P| = ۱۱+۲$ و $|M \cap E \cap P| = ۲$ مجموع همه اینها در یک فورمول می‌شود:

$$|M \cup E \cup P| = |M| + |E| + |P| - |M \cap E| - |M \cap P| - |E \cap P| + |M \cap E \cap P|$$

$$= ۶۰ + ۲۰۰ + ۴۰ - ۶ - ۵ - ۱۳ + ۲$$

$$= ۲۷۸$$

۱. ۲. ٦ دنباله‌هایی با ۰٤ ، ٤۲ ، یا ٦۰

در چندین جایگشت مجموعه $\{۱,۲,...,۹\}$ یا ۴ و ۲ یا، ۰ و ۴ یا ۶ و ۰ به طور متناوب ظاهر می‌شوند؟ برای مثال، هیچ کدام از این جفت‌ها در دنباله زیر ظاهر نمی‌گردند:

$(۷,۲,۹,۵,۴,۱,۳,۸,۰,۶,)$

<u>۰۶</u>در پایان شمرده نمی‌شود؛ ما به ۶۰ نیاز داریم. از سوی دیگر، هر دوی ۰۴ و ۶۰ به طور متوالی در این جایگشت ظاهر می‌شوند:

$(۷,۲,۵,\underline{۶},\underline{۰},\underline{۴},۳,۸,۱,۹)$

فرض کنید $P_{۴۲}$ مجموعه تمام جایگشت‌هایی باشد که ۴۲ در آن ظاهر می‌شود؛ $P_{۶۰}$ و $P_{۰۴}$ را هم به همین سیاق تعیین کنید. با این حساب، برای مثال، جایگشت بالا از هر دوی $P_{۶۰}$ و $P_{۴۲}$ برخوردار است. در این عبارت‌ها ما به دنبال اندازه مجموعه $P_{۴۲} \cup P_{۰۴} \cup P_{۶۰}$ هستیم.

ابتدا، باید اندازه مجموعه‌های تکی را تعیین کنیم، همانند $P_{۶۰}$. می‌توانیم از یک ترفند استفاده کنیم: ۶ و ۰ را با هم یکی بعنوان یک نماد مفرد بیاوریم. آنگاه یک نگاشت دوسویی طبیعی میان جایگشت‌های $\{۰,۱,۲,\ldots,۹\}$ که متناوباً حاوی ۶ و ۰ هستند و جایگشت‌های:

$\{۶۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد.

برای مثال، دو دنباله زیر متناظرند:

$$(۷,۲,۵,\underline{۶,۰},۴,۳,۸,۱,۹) \leftrightarrow (۷,۲,۵,\underline{۶۰},۴,۳,۸,۱,۹)$$

تعداد!۹ جایگشت مجموعه‌ای که حاوی ۶۰ باشند وجود دارد، بنابراین $|P_{۶۰}|=۹!$ با توجه به قانون نگاشت دوسویی. همین‌طور هم، $|P_{۰۴}|=|P_{۴۲}|=۹!$ چنین است.

بعد از آن، باید اندازه اشتراک‌های دوتایی مثل $P_{۴۲} \cap P_{۶۰}$ را تعیین کنیم. دوباره با استفاده از ترفند تجمیع، یک نگاشت دوسویی به جایگشت‌های مجموعه $\{۴۲,۶۰,۱,۳,۵,۷,۸,۹\}$ وجود دارد.

بنابراین، $|P_{۴۲} \cap P_{۶۰}|=۸!$ به همین سان هم، $|P_{۶۰} \cap P_{۰۴}|=۸!$ با توجه به نگاشت دوسویی مجموعه

$\{۶۰۴,۱,۲,۳,۵,۷,۸,۹\}$

و $|P_{۴۲} \cap P_{۶۰}|=۸!$ هم به کمک استدلالی مشابه حاصل می‌شود. سرانجام، توجه داشته باشید که $|P_{۶۰} \cap P_{۰۴} \cap P_{۴۲}|=۷!$ با در نظر گرفتن نگاشت دوسویی به مجموعه زیر حاصل می‌شود

$\{۶۰۴۲,۱,۳,۵,۷,۸,۹\}$

وارد کردن همه اینها با هم درون یک فورمول می‌شود:

$$\left|P_{۴۲} \cup P_{۰۴} \cup P_{۶۰}\right| = ۹! + ۹! + ۹! - ۸! - ۸! - ۸! + ۷!$$

۳. ٦ اجتماع n مجموعه

اندازه اجتماع n مجموعه با قانون زیر ارائه می‌شود.

قانون ۹ (اصل شمول و عدم شمول).

$$\left|S_{۱} \cup S_{۲} \cup \ldots \cup S_{n}\right| =$$

حاصل‌جمع اندازه تک‌تک مجموعه‌ها

منهای اندازه‌های اشتراک‌های دوتایی از مجموعه‌ها

به اضافه اندازه‌های اشتراک‌های سه‌تایی از مجموعه‌ها

منهای اندازه‌های اشتراک‌های چهارتایی از مجموعه‌ها

به اضافه اندازه‌های اشتراک‌های پنج‌تایی از مجموعه‌ها و الی آخر.

راه‌های مختلفی برای نگارش فورمول شمول– عدم شمول در نمادهای ریاضی وجود دارند، ولی هیچ کدام بطور خاصی واضح نیستند، بنابراین فقط از کلمات استفاده برده‌ایم. فورمول‌هایی برای اجتماع دو و سه مجموعه موارد خاص این قانون کلی هستند.

۱. ۳. ٦ شمارش اعداد اول

چه تعداد از ارقام ۱,۲,۳,...,۱۰۰ عدد اول هستند؟ یک راه برای پاسخ بـه ایـن پرسـش امتحـان کردن هر عدد تا ۱۰۰ است تا اول بودنش معلوم شود و کنار گذاشته شود. ایـن کـار تـلاش قابـل ملاحظه‌ای می‌طلبد. (آیا ۵۷ عدد اول است؟ ۶۷ چطور؟)

راه دیگر استفاده از اصل شمول و عدم شمول است. این راه ترفندی می‌طلبد: بـرای تعیـین اعـداد اول، ابتدا به ساکن اعداد غیراول را شمارش می‌کنیم. با توجه به قانون حاصل‌جمع آنگاه می‌توانیم تعداد اعداد اول را با منها کردن از ۱۰۰ پیدا کنیم. این ترفند "شمارش متمم اسـت" کـه بـرای بـه خاطر سپردن خوب چیزی است.

تقلیل به اجتماع چهار مجموعه

مجموعه اعداد غیر اول در برد ۱,...,۱۰۰ متشکل است از مجموعه، C، اعداد مرکب در این بـرد: ۴,۶,۸,۹,...,۹۹,۱۰۰ و عدد ۱، که نه عدد اول است نه مرکب. کار اصلی تعیـین انـدازه مجموعـه C، اعداد مرکب است. بدین منظور، فرض کنید که A_m مجموعه اعداد در برد $m+$۱,...,۱۰۰ کـه قابل تقسیم بر m هستندباشند.

$$A_m :: \left\{ x \le ۱۰۰ \middle| x > m, (m|x) \right\}$$

برای مثال، $A۲$ عبارت است از کلیه اعداد زوج از ۴ تا ۱۰۰. لم زیـر اینـک مـا را مجـاز مـی‌دارد تعداد عضوهای C را با استفاده از اصل مشمول و عدم شمول برای اتحاد چهار مجموعه شمارش کنیم:

لم ۱. ٦

$C = A_۲ \cup A_۳ \cup A_۵ \cup A_۷$

برهان. ما تساوی دو مجموعه را با نشان دادن اینکه هر یک حاوی دیگری است ثابت می‌کنیم.

برای نشان دادن اینکه $A_۲ \cup A_۳ \cup A_۵ \cup A_۷ \subseteq C$ در فرض کنید که n یک عضو $A_۲ \cup A_۳ \cup A_۵ \cup A_۷$ باشد. پس برای $n \in A_m$، ۷ یا $m = ۲,۳,۵$ این دلالت می‌کند که n در برد ۱,...۱۰۰ قرار دارد و مرکب است زیرا m را به عنوان یک فاکتور در اختیار دارد. یعنی اینکه، $n \in C$. بالعکس، برای نشان دادن اینکه $C \subseteq A_۲ \cup A_۳ \cup A_۵ \cup A_۷$ فرض کنید n یک عضو از C باشد. آنگاه n یک عدد مرکب در برد ۱,...,۱۰۰ است.

معنایش این است که n حداقل دو فاکتور اول دارد. حالا اگر هر دو فاکتور اول ۱۰< باشند، آنگاه حاصل‌ضرب آنها عددی مثل ۱۰۰< خواهد شد که در تناقض با این حقیقت است که $n <$ ۱۰۰.

بنابراین n باید یک فاکتور اول ۱۰≥ داشته باشد. ولی ۵,۳,۲ و ۷ تنها اعداد اول ۱۰≥ هستند.

معنی‌اش این است که n عضوی از $A_۲, A_۳, A_۵$ یا $A_۷$ است، و بنابراین $n \in A_۲ \cup A_۳ \cup A_۵ \cup A_۷$

□

شمارش تعداد عضوهای اجتماع

اینک پیدا کردن تعداد عضوهای هر مجموعه A_m آسـان اسـت: هـر mامـین عـدد صـحیح قابـل قسمت بر m است، بنابراین تعداد اعداد صحیح در برد ۱,...,۱۰۰ که قابل قسمت بر m باشـند به سادگی از این قرار است $\lfloor \frac{۱۰۰}{m} \rfloor$. بنابراین

$$|A_m| = \lfloor \frac{۱۰۰}{m} \rfloor - ۱,$$

۱– اضافه می‌شود چون که تعیین کردیم که A_m خود m را مستثنی می‌کند. این فورمول نتیجه‌اش می‌شود:

$$|A_۲| = \lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \rfloor - ۱ = ۴۹$$

$$|A_۳| = \lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \rfloor - ۱ = ۳۲$$

$$|A_۵| = \lfloor \frac{۱۰۰}{۵} \rfloor - ۱ = ۱۹$$

$$|A_۷| = \lfloor \frac{۱۰۰}{۷} \rfloor - ۱ = ۱۳$$

توجه کنید که این مجموعه‌های $A_۲, A_۳, A_۵$ و $A_۷$ جدا از هم نیستند. بـرای مثـال، ۶ در هـر دوی $A_۲$ و $A_۳$ قرار دارد. از آنرو که مجموعه‌ها دارای اشتراک هستند، باید از اصل شمول– عدم‌شمول استفاده کنیم:

$$|C| = |A_۲ \cup A_۳ \cup A_۵ \cup A_۷|$$

$$= |A_۲| + |A_۳| + |A_۵| + |A_۷|$$

$$-|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7|$$

$$+|A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$

$$-|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$$

عبارت‌های زیادی در اینجا وجود دارند! خوشبختانه، همه آنها برای ارزیابی آسان هستند. برای مثال، $|A_3 \cap A_7|$ تعداد مضربهای $21 = 3.7$ در برد ۱ تا ۱۰۰ است، که می‌شود $4 = \lfloor 100/21 \rfloor$ با جایگزینی چنین مقادیری از همه عبارت‌های بالا داریم:

$$\begin{aligned}
|C| &= 49+32+19+13 \\
&-16-10-7-6-4-2 \\
&+3+2+1+0 \\
&-0 \\
&= 74
\end{aligned}$$

این شمارش نشان می‌دهد که تعداد ٧٤ عدد مرکب در برد یک تا صد وجود دارد. از آنرو که عدد ۱ نه مرکب نه اول، تعداد $25 = 1 - 74 - 100$ عدد اول در این برد وجود دارد.

در این مرحله شاید به نظر برسد که بررسی هر عدد از یک تا صد برای شمارش تعداد اعداد اول چه بسا آسان‌تر از استفاده کردن از اصل شمول و عدم شمول باشد.

با این وجود، روش شمول- عدم شمول بکار رفته در اینجا مجانباً وقتی که برد اعداد بزرگ می‌شود، سریع‌تر است.