دوره‌های آزاد رایانه‌ای SBU-MIT OCW Joint Project	بسمه تعالی عنوان درس: **ریاضیات برای علوم کامپیوتر**	کد درس: ۱۸/۰۶۲J و ۶/۰۴۲J مقطع آموزشی: کارشناسی
معاونت فناوری اطلاعات وارتباطات پروژه مشترک دانشگاه شهید بهشتی و دانشگاه MIT		استاد مدرس MIT : پروفسور آلبرت مِیر و پروفسور رونیت روبینفلد استاد مترجم SBU : دکتر چنگیز اصلاح‌چی

فصل دوازدهم

مقدمه‌ای برای احتمال

احتمال آخرین عنوان این دوره و چه بسا مهم‌ترین موضوع باشد. بسیاری از الگوریتم‌ها به بخت و اقبال متکی هستند. برای تحقیق درباره درستی و صحت آنان به نظریه احتمال نیاز است. وانگهی، جوانب بسیاری از سیستم‌های کامپیوتری، نظیر مدیریت حافظه، بازاریابی، بسته‌بندی گروهی و توازن بار الکتریکی، همگی بر اساس تجزیه و تحلیل‌های احتمالاتی طراحی می‌شوند. همچنین احتمال در نظریه اعداد، رمزنگاری، هوش مصنوعی و تئوری بازی مطرح می‌شود.

آن سوی این کاربری‌های مهندسی، درکی از احتمال چشم اندازی را به بسیاری از موارد روزمره نظیر، رأی‌گیری، آزمایش DNA، تخمین خطر، سرمایه گذاری و قمار به دست می‌دهد.

بنابراین احتمال جنس به درد بخوری است.

۱. مانتی هال

در مقاله نهم ماه سپتامبر ۱۹۹۰ مجله نمایش با شکوه، ستون‌نویس مجله به نام ماریلین فوس ساوان به این نامه پاسخ داد:

فرض کنید در یک نمایش بازی هستید و حق انتخاب سه در برایتان در نظر گرفته شده است. پشت یکی از درها یک خودرو و پشت دیگر درها پوست‌های بز است.

شما یک در را انتخاب می‌کنید، فرضاً در شماره ۱ و مجری، که می‌داند پشت درها چه چیزی قرار دارد، در دیگر را باز می‌کند، فرضاً در شماره ۳ ، که پوست بز دارد به شما می‌گوید "آیا حاضرید در شماره ۲ را انتخاب کنید؟" آیا به سود شما است که در انتخابی خود را تغییر دهید؟

کریگ. اف. وایتاکر

کلمبیا، ام دی

این نامه شدیداً وضعیتی که مسابقه دهندگان نمایش بازی در سال ۱۹۷۰ به نام "بیائید معامله کنیم" با آن مقابله کردند با مجری‌گری مانتی هال و کارول مریل را شرح می‌دهد. ماریلین پاسخ داد که مسابقه دهندگان در واقع باید تغییر نظر می‌دادند. ولی او به زودی سیلی از نامه – بسیار از نامه‌ها متعلق به ریاضی‌دانان بود – دریافت کرد که به او می‌گفتند که در اشتباه است. آن مسئله هزاران ساعت بگو مگوی داغ به راه انداخت.

هنوز هم این یک مسئله مقدماتی با یک حل مقدماتی است. چرا آن قدر مشاجره براه افتاد؟ مسلماً، بسیاری از افراد بر این باورند که یک درک باطنی از احتمال دارند.(این در تقابل صرف با دیگر شاخه‌های ریاضیات است، تعداد کمی از مردم بر این باورند که از توان درک باطنی برای محاسبه انتگرال‌ها یا تجزیه اعداد صحیح بزرگ برخوردارند). متأسفانه، تقریباً ۱۰۰٪ درصد این افراد در اشتباهند. در واقع، هر کسی که احتمال را در طول مطالعه کرده باشد می‌تواند نیم– دوجین از مسائلی را که درک باطنی‌شان آنها را گمراه کرده نام ببرد– شرمنده که اغلب اینچنین است.

روش اجتناب از درافتادن به اشتباه، عدم اعتماد به بحث‌های غیررسمی و در عوض تکیه کردن به راه و روش منظم و محکم است. بطور خلاصه: درک باطنی بد، شکل‌گرایی (ظاهر بینی) خوب است. اگر اصرار دارید که بر حس باطنی تکیه کنید، پس معامله‌های اجباری مالی زیادی هستند که مایلیم به شما ارائه کنیم!

۱. ۱ شیوه چهار – مرحله‌ای

هر مسئله احتمال با مقداری از انواع تجربه تصادفی، فرآیند، یا بازی درگیر است. و هر چنین مسئله‌ای با دو چالش متمایز روبرو است:

۱– چگونه وضعیت مورد نظر را با نگاه ریاضی الگوسازی می‌کنیم؟

۲– چگونه مسئله بدست آمده ریاضی را حل می‌کنیم؟

در این بخش، یک روش چهار مرحله‌ای برای پرسش‌هایی به شکل، "چه قدر احتمال – دارد که – ؟" را معرفی می‌کنیم. در این روش، یک الگوی احتمالاتی مرحله– به مرحله بنا می‌کنیم و پرسش اولیه را به عبارت‌های آن الگو صورت‌بندی می‌کنیم. به صورت قابل ملاحظه‌ای، اندیشه بنا شده‌ای که این روش تحمیل می‌کند بسیاری از مسائل پرآوازه – مغشوش را از در افتادن به ابتذال می‌کاهد. برای مثال، همان طور که خواهید دید، روش چهار مرحله‌ای به شکل چاقوی گینسو مسئله درهم و برهم مانتی هال را از هم می‌شکافد. با این وجود، پرسش‌های پیچیده‌تر احتمال ممکن است چالش محاسباتی، جمع‌بندی و مسائل تقریب – را که خوشبختانه چندین هفته قبل یاد گرفتید که چگونه آن‌ها را حل کنید، دیگرگون کند!

۲. ۱ توضیح مسئله

نامه اولیه کریگ به ماریلین فوس ساوان کمی مبهم است، بنابراین به منظور برخورداری از کمی امید برای نمونه سازی رسمی بازی باید مقداری فرضیه مطرح کنیم

۱– ماشین با احتمال مساوی پشت یکی از سه در پنهان است.

۲– بازیکن با احتمال مساوی می‌تواند هر یک از سه در را انتخاب کند، بدون دانستن محل ماشین.

۳– پس از اینکه بازیکن یک در را انتخاب کند، مجری باید دری متفاوت که یک پوست بز پشت آن باشد را باز کند و به بازیکن پیشنهاد کند که اختیار دارد همان در اولیه را حفظ کند یا تغییر رأی دهد.

٤– اگر مجری اختیار داشته باشد کدام در را باز کند، پس با احتمال مساوی هر یک از درها را می‌تواند انتخاب کند.

در ساختن این فرض‌ها، مقدار زیادی به مطالعه نامه و ایتاکر می‌پردازیم. دیگر تفاسیر هم حداقل قابل دفاع هستند و برخی عملاً به پاسخ‌های متفاوت می‌انجامد.

ولی بیائید فعلاً با این فرض‌ها موافقت کنیم و به این پرسش توجه کنیم، "چه‌قدر احتمال برای بازیکنی که تغییر رأی می‌دهد وجود دارد که ماشین را برنده شود؟"

۳. ۱ مرحله (گام) ۱: فضای نمونه را پیدا کنید

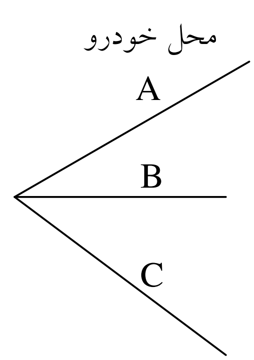
نخستین هدف ما شناسایی همه پی‌آمدهای ممکن تجربه مورد نظر است. یک تجربه نوعی، چندین مقدار تصادفی معین شده را درگیر می‌سازد. برای مثال، بازی مانتی هال سه گونه از چنین مقادیر را درگیر می‌کند:

۱- دری که خودرو را پنهان می‌کند.

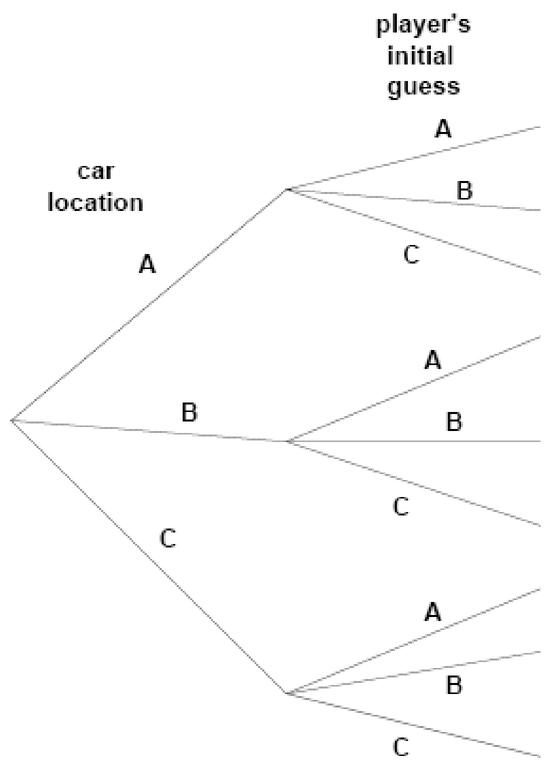
۲- دری که ابتدا به ساکن توسط بازیکن (مسابقه دهنده) انتخاب می‌شود.

۳- دری که مجری باز می‌کند تا پوست بز را آشکار سازد.

هر تفسیر ممکن از این مقادیر تصادفی معین شده را یک پی آمد می‌نامند. مجموعه کلیه پی آمدهای ممکن را فضای نمونه تجربه می‌نامند. یک نمودار درختی ابزار گرافیکی است که می‌تواند در شیوه چهار – مرحله‌ای هنگامی که تعداد پی‌آمدها خیلی بزرگ نباشد یا مسئله به خوبی بنا شده باشد به ما کمک کند. بویژه، می‌توانیم از نمودار درختی برای کمک به فهم فضای نمونه یک آزمون استفاده کنیم. اولین مقدار تصادفی– معین شده در آزمون ما دری است که جایزه را پنهان می‌کند. این را به صورت درختی با سه شاخه نمایش می‌دهیم:

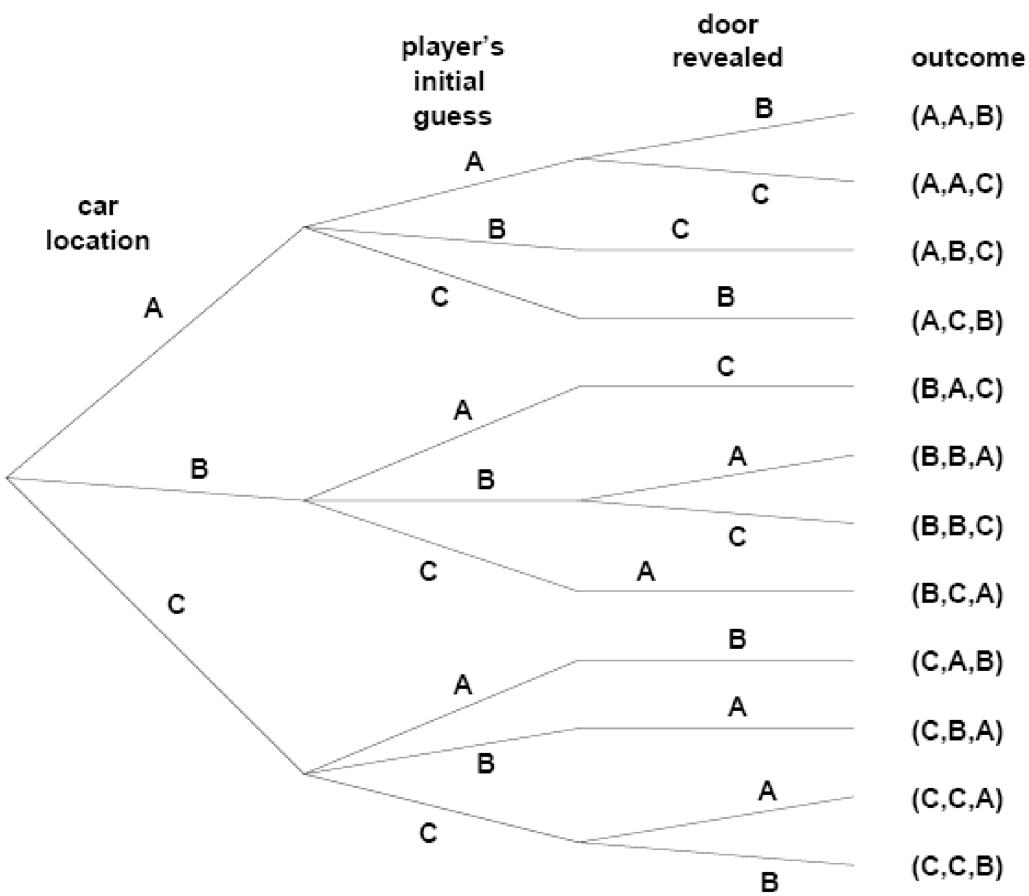


در این نمودار، درها، به جای اینکه ۱ و ۲ و ۳ نامیـده شـوند C,B,A خوانـده مـی‌شـوند، زیـرا شماره‌های دیگری را به تصویر اضافه خواهیم کرد. اینک، برای هر جای ممکن جایزه، بازیکن در ابتدا می‌تواند هر کدام از سه در را انتخاب کند. این موضوع را با افزودن یک لایه دوم بـه درخـت نشان می‌دهیم.



سرانجام، مجری یک در را باز می‌کند تا پوست بز را آشکار کند. مجری هم یک یا دو گزینه دارد، که منوط است به موقعیت ماشین و دری که در ابتدا توسط بازیکن انتخاب شده است. برای مثال، اگر جایزه پشت در A باشد و بازیکن در B را انتخاب کند، آنگاه مجری باید در C را باز کند.

با این همه، اگر جایزه پشت در A باشد و بازیکن هم در A را انتخاب کند، آنگاه مجری می‌تواند هم در B یا در C را باز کند. تمام این احتمالات در یک لایه سوم نمودار درختی تعبیه شده‌اند:



حالا بیائید این تصویر را به عبارت‌هایی که پیش از این معرفی کردیم ربط دهیم:

برگ‌های درخت بیانگر پی‌آمدهای آزمون هستند و مجموعه تمام برگ‌ها فضای نمونه را نشان می‌دهد. بنابراین، برای این آزمون، فضای نمونه ۱۲ پی‌آمد را شامل می‌شود. برای مرجع، هر پی‌آمد را با سه تایی بر چسب زده‌ایم تا نشانگر:

(درپنهان کننده جایزه، در ابتدا به ساکن انتخاب شده، در باز شده برای معلـوم شـدن پوسـت بـز) باشد.

در این عبارت ها، فضای نمونه عبارت است از مجموعه:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{llllll} (A,A,B), & (A,A,C), & (A,B,C), & (A,C,B), & (B,A,C), & (B,B,A), \\ (B,B,C), & (B,C,A), & (C,A,B), & (C,B,A), & (C,C,A), & (C,C,B) \end{array} \right\}$$

نمودار درختی یک معنای تعریض هم دارد: می‌توانیم به کلیت آزمون به عنوان یک "راه‌پیمایی" از ریشه به برگ نگاه کنیم، جایی که شاخه انتخابی در هر مرحله به طور تصادفی تعیین شـده اسـت. این معنا را در ذهن نگه دارید، بعداً باز هم از آن استفاده خواهیم کرد.

٤. ۱ مرحله دوم: رویدادهای مورد علاقه را معین کنید

هدف ما پاسخ دادن به سئوال هایی نظیر " چقدر احتمال دارد که – ؟" است جایی که خـط افقـی در مقابل جمله‌ای نظیر " بازیکن با تغییر رأی دادن برنده می‌شود"، "بازیکن ابتدا بـه سـاکن دری که جایزه را پنهان کرده برمی‌گزیند"، یا "جایزه پشـت در قـرار دارد" تقریبـاً هـر چنـین عبـارتی می‌تواند به صورت ریاضی به عنوان یک رویداد نمونه سازی شود، که به شکل زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه مشخص می‌شود.

برای مثال، رویدادی که جایزه پشت در C باشد مجموعه‌ای است از پی‌آمدهای:

$$\{(C,A,B),(C,B,A),(C,C,A),(C,C,B)\}$$

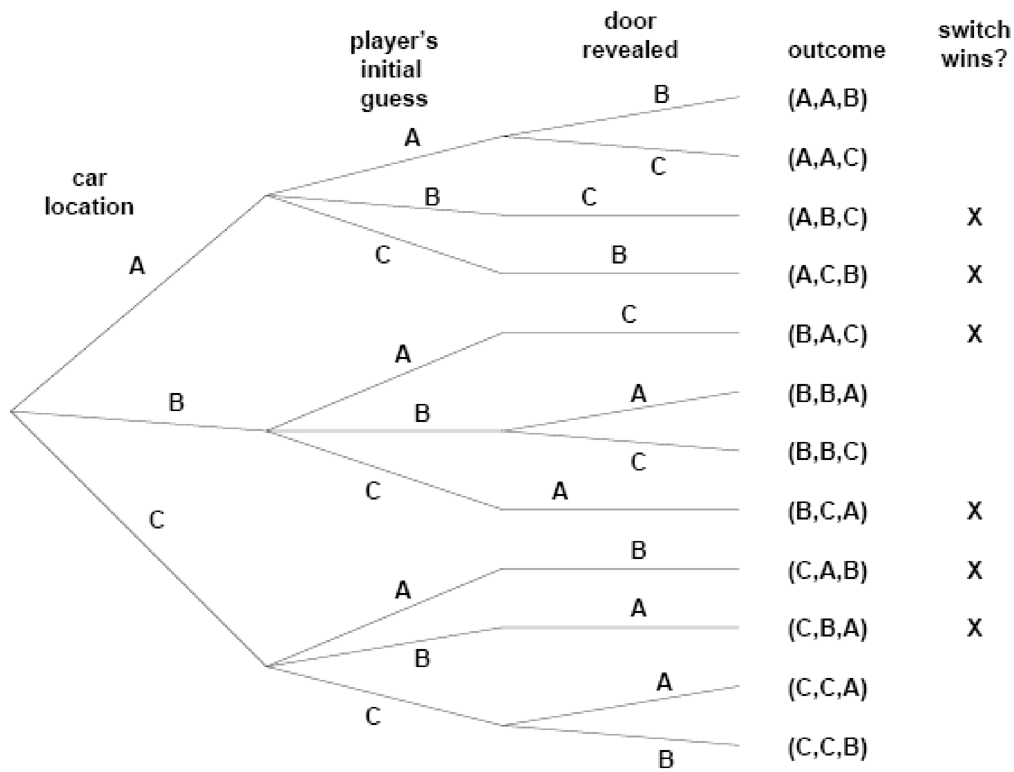
رویدادی که مسابقه دهنده ابتدا بــه دری را برگزیــد کــه جــایزه پنهــان کــرده مجموعــه ایســت از پی‌آمدهای:

$$\{(A,A,B),(A,A,C),(B,B,A),(B,B,C),(C,C,A),(C,C,B)\}$$

و آنچه را که واقعاً به دنبالش هستیم، همان رویدادی کــه مســابقه دهنــده را بــا تغییــر رأی پیــروز می‌گرداند، مجموعه‌ای است از پی‌آمدهای:

$$\{(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$$

بیائید نمودار درختی مان را تفسیر کنیم تا پی آمدهای این رویداد را معلوم کنیم.



توجه داشته باشید که دقیقاً نیمی از پی‌آمدها علامت‌گذاری شده‌اند، به این معنی که مسابقه دهنـده با تغییر رأی دادن در نیمی از تمام پی‌آمده‌ها برنده می‌شود. چه بسا که وسوسه شوید به این نتیجه برسید که مسابقه دهنده‌ای که تغییر رأی بدهد به احتمال ۱/۲ برنده شود. اشتباه است. دلیلش هـم این است که همه این پیامدها متساوی الاحتمال نیستند، که بزودی متوجه خواهیم شد.

۵. ۱ مرحله ۳: احتمالات پی آمد را تعیین کنید

تا کنون تمام پی‌آمدهای ممکن آزمون را بر شمرده‌ایم. حالا باید ارزیابی شانسی بودن آن پی‌آمدها را شروع کنیم. بویژه، هدف این مرحله واگذاری یک احتمال به هر پی‌آمـد اسـت، کـه یـک عـدد

واقعی بین صفر و یک است. حاصل‌جمع احتمالات پی‌آمد باید ۱ باشد و این واقعیت را بازتاب دهد که دقیقاً یک پی‌آمد رخ بدهد.

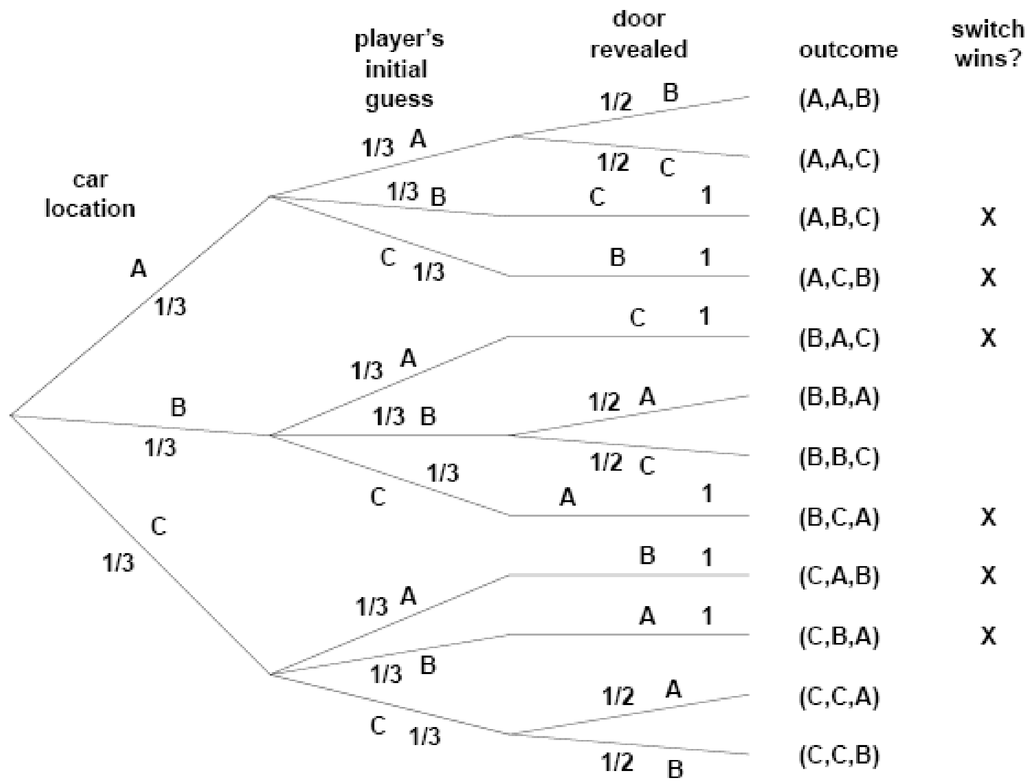
نهایتاً، احتمالات پی‌آمد توسط پدیده‌ای که داریم نمونه سازی‌اش می‌کنیم تعیین می‌شوند و بر این اساس مقادیری نیستند که بتوانیم به شکل ریاضی استخراج کنیم.

با این وجود، ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند تا احتمال هر پی‌آمد مبتنی بر تصمیم‌های نمونه سازی شده کمتر و مقدماتی‌تر را محاسبه کنیم. بویژه، ما تکلیف تعیین احتمالات پی‌آمد را به دو وهله تقسیم می‌کنیم.

۱. ۵. ۱ مرحله ۳a: احتمالات یال‌ها را اختصاص دهید

ابتدا، بر روی هر یال نمودار درختی یک احتمال را ثبت می‌کنیم. این احتمالات – یالی توسط فرض‌هایی که در آغاز مطرح کردیم تعیین می‌شوند: که جایزه به صورت متساوی الاحتمال پشت هر دری می‌تواند باشد، که مسابقه دهنده بصورت متساوی الاحتمال می‌تواند هر دری را انتخاب کند و اینکه مجری به صورت متساوی الاحتمال می‌تواند هر پوست بز را آشکار سازد، اگر اختیار داشته باشد.

یادتان باشد وقتی که مجری هیچ گزینه‌ای برای باز کردن در نداشته باشد، به شاخه مفرد احتمال ۱ تخصیص می‌یابد.



۲. ۵. ۱ مرحله $3b$: محاسبه احتمالات پی‌آمد

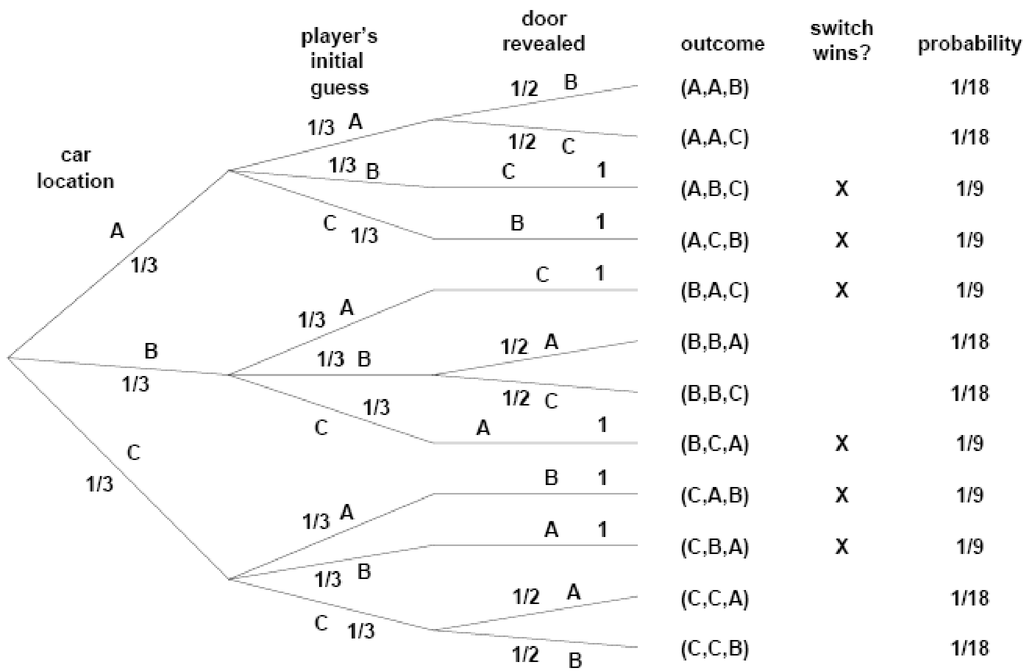
کار بعدی ما تبدیل احتمالات یالی به احتمالات پی‌آمدی است. این یک فرایند تمام عیار مکانیکی است: احتمال یک پی‌آمد برابر است با حاصل‌ضرب احتمالات – یالی در مسیر ریشه به آن پی‌آمد، برای مثال، احتمال پی‌آمد (A,A,B) عبارت است از

$$\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۸}$$

به شکل رسمی این فرایند را بعداً روشن خواهیم ساخت. در عین حال، اینجا یک توجیه غیررسمی درست و حسابی است تا حالتان را جا بیاورد. به خاطر داشته باشید که کلیت آزمون را می‌توان به صورت یک راه‌پیمائی از ریشه نمودار درختی تا یک برگ در نظر گرفت، جایی که شاخه‌ای که در هر مرحله کشیده شده به شکل تصادفی تعیین گشته است. بویژه، احتمالات بر روی یال مشخص می‌کند که با چه تشابهی راه‌پیمایی در طول هر مسیر باید پیش برود. برای مثال، یک راه‌پیمایی که از ریشه مثال ما شروع شود به صورت متساوی الاحتمال باید از سه – سطح شاخه بالایی پائین برود.

حالا، به چه میزان چنین راه‌پیمایی متشابه به رسیدن به بالاترین پی‌آمد (A, A, B) است؟ خب یک شانس ۱ به ۳ وجود دارد که راه‌پیمایی در سطح بالای شاخه A دنبال شود یک شانس ۱ به ۳ در طول شاخه A در سطح دوم امتداد خواهد یافت و یک شانس ۱ به ۲ در شاخه B در سطح سوم دنبال خواهد شد. بنابراین به نظر می‌رسد که حدود ۱ راه‌پیمایی در ۱۸ به برگ (A, A, B) خواهد رسید، که مشخصاً احتمال است که آنرا اختصاص داده‌ایم.

به هر حال، بیائید کلیه احتمالات پی‌آمد در نمودار درختی‌مان را ثبت کنیم.



مشخص نمودن احتمال هر پی‌آمد منتج به تعیین تابعی که هر پی‌آمد را به یـک احتمـال منسـوب کند، است. این تابع را معمولاً pr می‌نامند. در این عبارت‌ها فقط تعیین کرده‌ایم که:

$$pr\{(A,A,B)\}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$pr\{(A,A,C)\}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$pr\{(A,A,C)\}=\frac{۱}{۹}$$

پیش از این گفتیم که حاصل‌جمع کلیه احتمالات پی‌آمد باید ۱ باشد، از آنرو که دقیقاً بایـد یـک پی‌آمد اتفاق بیفتد. حالا می‌توانیم این را بصورت نمادین بیان کنیم:

$$\sum_{X=S} pr\{x\}=۱$$

در این معادله، S بیانگر فضای نمونه است.

با این حساب pr یک تابع معمولی است، درست شبیه به دوستان قدیمی‌تان f و g که اهل حساب و جامعه فاصله هستند، ما آن را در معرض همه جور سوء استفاده‌های وحشتناک نمادین مبنی بر مازاد بودن f و g قرار می‌دهیم. فقط برای مبتدی‌ها کلیه نمادهای زیر برای احتمال یک پی‌آمد x مشترک هستند:

$$pr\{x\} \quad pr(x) \quad pr[x] \quad pr\,x \quad p(x)$$

یک فضای نمونه که S باشد و یک تابع احتمال $pr : S \to [0,1]$ روی هم رفته تشکیل یک فضای احتمال می‌دهند. با این حساب، فضای احتمال، همه پی‌آمدهای ممکن یک آزمون را تشریح کرده و احتمال هر پی‌آمد را بدست می‌دهد. یک فضای احتمال یک نمونه کامل ریاضی از یک آزمون است.

۶. ۱ مرحله ٤: احتمالات رویداد را محاسبه کنید

اینک یک احتمال برای هر پی‌آمد داریم، ولی می‌خواهیم احتمال یک رویداد را تعیین کنیم. می‌توانیم این شکاف را با یک تعریف پر کنیم:

احتمال یک رویداد عبارت است از مجموع احتمالات پی‌آمدهایی که در آن نهفته است.

به عنوان موضوعی نمادین، احتمال یک رویداد $E \subseteq S$ به شکل $pr\{E\}$ نوشته می‌شود. بنابراین، تعریف ما درباره احتمال یک رویداد را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$pr\{E\} ::= \sum_{x \in E} pr\{x\}.$$

برای مثال، احتمال رویدادی که مسابقه دهنده با تغییر رأی دادن برنده می‌شود عبارت است از:

$$pr\ \{\text{با تغییر رای برنده می‌شود}\} = pr\{A,B,C\} + pr\{A,C,B\} + pr\{B,A,C\}$$

$$+ pr\{B,C,A\} + pr\{C,A,B\} + pr\{C,B,A\}$$

$$= \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹}$$

$$= \frac{۲}{۳}$$

به نظر می‌رسد که پاسخ ماریلین صحیح است، مسابقه دهنده‌ای که تغییر رأی می‌دهد به احتمال $\frac{۲}{۳}$ برنده ماشین می‌شود! در مقابل، مسابقه دهنده‌ای که در کنار در اولیه‌ای که برگزیده بماند به احتمال $\frac{۱}{۳}$ برنده می‌شود، از آنرو که باقی ماندن برنده می‌شود اگر و فقط اگر تغییر رأی بازنده شود.

از شر مسئله راحت شدیم! نیاز به هیچ التماس برای درک باطنی یا همانندی‌های هوشمندانه نداشتیم. در واقع، هیچ گونه عملیات ریاضی سخت‌تر از جمع کردن و ضرب کسری لازم نداشتیم. تنها قسمت مشکل مقاومت در مقابل وسوسه در افتادن به یک پاسخ "باطناً آشکار" است.

۷. ۱ یک تفسیر جایگزین مسئله مانتی هال

آیا ماریلین حق داشت؟ تجزیه ما رای به درستی نظر او می‌دهد. ولی یک نتیجه‌گیری دقیق‌تر این است که پاسخ او صحیح است به شرط اینکه با تفسیر او از پرسش موافقت کنیم. یک تفسیر محتمل متساوی وجود دارد که در آن پاسخ ماریلین غلط است. توجه کنید که نامه اصلی وایتاکر نمی‌گوید که مجری ملزم به بر ملا کردن پوست بز است و به مسابقه دهنده پیشنهاد تغییر رأی بدهد، صرفاً می‌گوید که این کارها را انجام داده است. در واقع، در نمایش بیائید معامله کنیم، گاهی اوقات مانتی هال همان دری که مسابقه دهنده در ابتدا انتخاب می‌کرد را به سادگی باز می‌کرد. بنابراین، اگر که می‌خواست، مانتی می‌توانست گزینه تغییر رأی را به رقابت کننده‌ای بدهد که ابتدا در درست را انتخاب کرده است. در این حالت، تغییر رأی دان اصلاً به کار نمی‌آید!

۸. ۱ همانندی‌های احتمال

تعریف‌هایی که ارائه کرده‌ایم به تعداد همانندی‌های مفید می‌انجامد که گرفتار احتمالات می‌شوند. بسیاری از مسائل احتمال را می‌توان به سرعت با چنین همانندی‌های حل نمود، کافی است که به آنها عادت کنید. اگر E یک رویداد باشد، آنگاه متمم E شامل کلیه پی‌آمدهای غیر موجود در E است و به صورت $\overline{E}$ نوشته می‌شود.حاصل جمع احتمالات متمم رویدادهای ۱ است:

$$pr\{E\} + pr\{\overline{E}\} = ۱$$

حدود نیمی از وقت، آسان‌ترین راه برای محاسبه احتمال یک رویداد محاسبه احتمال متمم آن است و سپس باید فورمول را به کار برد.

فرض کنید که رویدادهای $E_1,\ldots,E_n$ از هم جدا هستند، یعنی که، هر پی‌آمدی حداکثر در یک رویداد E_i است. قانون حاصل‌جمع می‌گوید که احتمال اتحاد این رویدادها مساوی است با حاصل‌جمع احتمالاتشان:

$$pr\{E_1 \cup \ldots \cup E_n\} = pr\{E_1\} + \ldots + pr\{E_n\}.$$

احتمال اتحاد رویدادهایی که ضرورتاً متمایز نیستند توسط یک فورمول شمول– عدم شمول همانند فرمول برای اندازه‌های مجموعه داده شده است:

$$pr\{E_1 \cup \ldots \cup E_n\} = \sum_i pr\{E_i\} - \sum_{i,j} pr\{E_i \cap E_j\} + \sum_{i,j,k} pr\{E_i \cap E_j \cap E_k\} \ldots$$

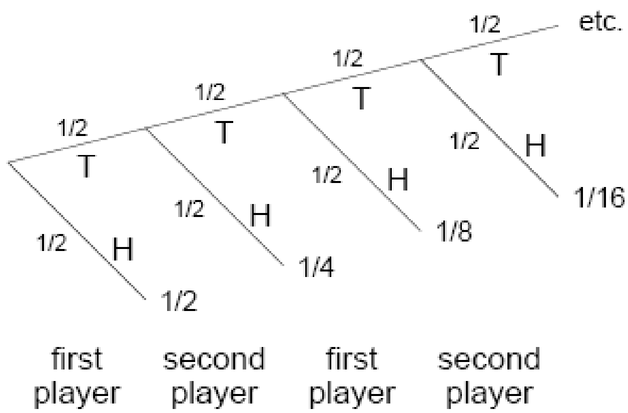
نامساوی زیر، به نام کران اتحاد، نیز صادق است حتی اگر رویدادهای $E_1,\ldots,E_n$ متمایز نباشند:

$$pr\{E_1 \cup \ldots \cup E_n\} \le pr\{E_1\} + \ldots + pr\{E_n\}.$$

کران اتحاد ساده و "به اندازه کافی خوب" برای بسیاری از احتمالات محاسباتی است. برای مثال، فرض کنید که E_i رویدادی است که یک مؤلفه بحرانی در یک کشتی فضایی با شکست روبرو می‌شود. سپس $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ رویدادی است که برخی از مؤلفه‌های بحرانی با شکست روبرو می‌شود. کران اتحاد جهشی والاتر در این احتمال حیاتی ارائه می‌کند و لازم نیست تا مهندس‌ها تمام عبارت‌های فورمول غول پیکر شمول و عدم شمول را برآورد کنند.

۲. فضای نمونه نامتناهی

فرض کنید دو بازیکن نوبت می‌گیرند تا یک سکه بازاری را پرتاب کند. کسی که اول شیر را با پرتاب بیاورد پیروز است، چقدر احتمال دارد که اولین مسابقه- دهنده برنده شود؟ در زیر یک نمودار درختی برای این مسئله، نشان داده شده است:



رویدادی که بازیکن نخست برنده می‌شود حاوی تعداد نامتناهی از پی‌آمدهاست، ولی همچنان می‌توانیم احتمالاتشان را جمع‌بندی کنیم:

$$pr\ \{\text{اولین بازیکن می‌برد}\} = \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۱۲۸}+\ldots$$

$$=\frac{۲}{۳}$$

در دومین مرحله، از فورمولی برای حاصل‌جمع سری‌های هندسی استفاده کردیم.

به همین سان، می‌توانیم احتمال اینکه مسابقه دهنده دوم برنده شود را محاسبه کنیم:

$$pr\ \{\text{دومین مسابقه دهنده می‌برد}\} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \frac{۱}{۲۵۶} + \dots$$

$$= \frac{۱}{۳}$$

در اصل، بازی می‌تواند برای همیشه ادامه یابد اگر دو مسابقه دهنده به پرتاب ادامه دهند. در نمودار درختی‌مان، این موقعیت با هیچ برگی انطباق ندارد- بیشتر، با مسیر نامتناهی انطباق دارد. بنابراین، این یک پی‌آمد نیست. اگر می‌خواستیم به این نحو به آن نگاه کنیم، می‌توانستیم یک برگ اضافی به عنوان یک فرزند به ریشه آن بی‌افزائیم. احتمال روی یال این برگ آنگاه باید احتمال مسیر (گذار) نامتناهی باشد

$$\frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲}\dots = \lim_{n\to x}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n = ۰.$$

از آنرو که این احتمال ۰ است، در محاسبات ما نباید هیچ مضایقه‌ای باشد. دستگاه ریاضی که بسط داده‌ایم برای نمونه‌گیری و تجزیه بسیاری از مسائل جالب توجه احتمال با فضاهای نمونه نامتناهی مناسب است.

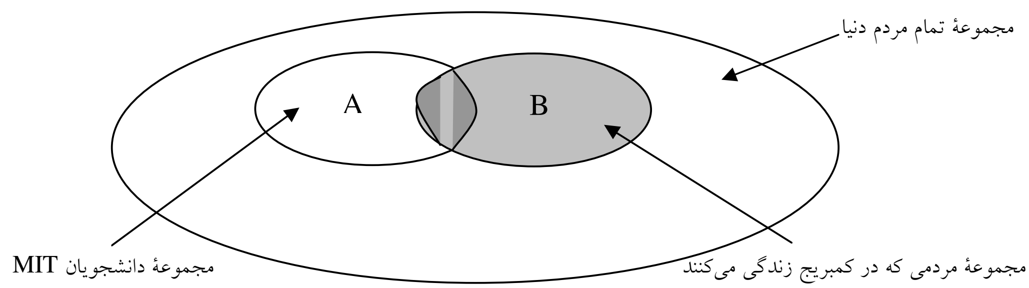
با این وجود، بعضی از فرایندهای نامتناهی پیچیده نیازمند نمادهای تئوری اندازه احتمال قدرتمندتر (و پیچیده‌تر) هستند. برای مثال، اگر یک دنباله نامتناهی اعداد تصادفی را بوجود آوریم $b_۱, b_۲, b_۳, \dots,$ آنگاه چقدر احتمال دارد که

$$\frac{b_۱}{۲^۱} + \frac{b_۲}{۲^۲} + \frac{b_۳}{۲^۳} + \dots$$

یک عدد گویا باشد؟ چنین مسائلی را در این دوره مطرح نمی‌کنیم.

۳. احتمال شرطی

فرض کنید فردی را در جهان به تصادف انتخاب کنیم. هر کسی شانس برابر برای انتخاب شدن دارد. در نظر بگیرید که A رویدادی باشد که آن فرد دانشجوی MIT باشد و در نظر بگیرید که B رویدادی باشد که آن فرد در کمبریج زندگی می‌کند. احتمالات این رویدادها چیستند؟ از روی حس درونی، نقطه‌ای تصادفی در بیضی بزرگی که در زیر نشان داده شده را انتخاب می‌کنیم و می‌پرسیم که آن نقطه چقدر متشابهاً به درون منطقه A یا B می‌افتد:



اکثریت وسیعی از مردم جهان نه در کمبریج زندگی می‌کنند نه دانشجوی MIT هستند، بنابراین رویدادهای A و B هر دو احتمال پائینی دارند. ولی احتمال اینکه یک فرد به فرض که در کمبریج زندگی کند، دانشجوی MIT باشد چقدر است؟

این باید خیلی بزرگتر باشد – ولی دقیقاً چه چیزی است؟

آنچه را که می‌خواهیم بپرسیم احتمال مشروط نامیده می‌شود؛ یعنی آنکه، احتمال که یک رویداد رخ بدهد، با این فرض که برخی رویدادهای دیگر حتماً اتفاق می‌افتد.

پرسش‌هایی درباره احتمالات مشروط که همیشه رخ می دهند از این قرارند:

- چقدر احتمال دارد که امروز عصر باران ببارد، فرضاً که امروز صبح هوا ابری باشد؟
- چقدر احتمال دارد که حاصل‌جمع دو روی تاسی ۱۰ بشود، با فرض بر اینکه هر دو تاس فرد باشند.
- چقدر احتمال دارد که من چهار ورق – از – یک – نوع در باشگاه با مسئولیت نامحدود پوکر تگزاس بدست بیاورم، با فرض بر اینکه در ابتدا دو بی‌بی داشته باشم؟

برای احتمالات مشروط یک علامت گذاری خاصی وجود دارد.

در کل، $pr\{A|B\}$ احتمال رویداد A را مشخص می‌سازد، به فرض که رویداد B رخ بدهد. بنابراین، در مثال ما، $pr\{A|B\}$ احتمال این است که شخص انتخاب شده دانشجوی MIT باشد، با این فرض که آن آقا یا خانم ساکن کمبریج است.

ما چگونه $pr\{A|B\}$ را محاسبه می‌کنیم؟ از آنرو که فرض کرده‌ایم که فرد مورد نظر در کمبریج زندگی می‌کند، می‌توانیم همه مردم دنیا که در کمبریج زندگی نمی‌کنند را فراموش کنیم. با این حساب، همه پی‌آمدهای خارج از رویداد B نامربوط هستند. بنابراین، بر اساس حس درونی، $pr\{A|B\}$ باید کسر ساکنین کمبریج باشد که همچنین دانشجویان MIT هستند؛ یعنی که، پاسخ باید این احتمال باشد که فرد مورد نظر در مجموعه $A \cap B$ قرار دارد(به سایه تاریک‌تر در شکل) تقسیم شده بر احتمال اینکه فرد مورد نظر در مجموعه B (به سایه روشن‌تر در شکل) قرار دارد.

این موضوع تعریف احتمال مشروط را می‌انگیزاند:

$$\Pr\{A|B\} ::= \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

اگر $\Pr\{B\} = 0$، احتمال مشروط $\Pr\{A|B\}$ نامعین است.

احتمال به طور کلی ضد الهام درونی است، ولی احتمال مشروط از این هم بدتر است! مشروط ساختن به طور ماهرانه‌ای می‌تواند احتمالات را دیگرگون کند و نتایج غیر منتظره‌ای در الگوریتم‌های تصادفی و نظام‌های رایانه و همچنین در بازی‌های شرط‌بندی بوجود بیاورد. هنوز هم، تعریف ریاضی احتمال مشروط ارائه شده در بالا بسیار ساده است و هیچ دردسر برایتان فراهم نمی‌کند—مشروط بر اینکه شما بر استدلال رسمی تکیه کنید و نه بر الهام درونی.

۱. ۳ مسئله درنگ

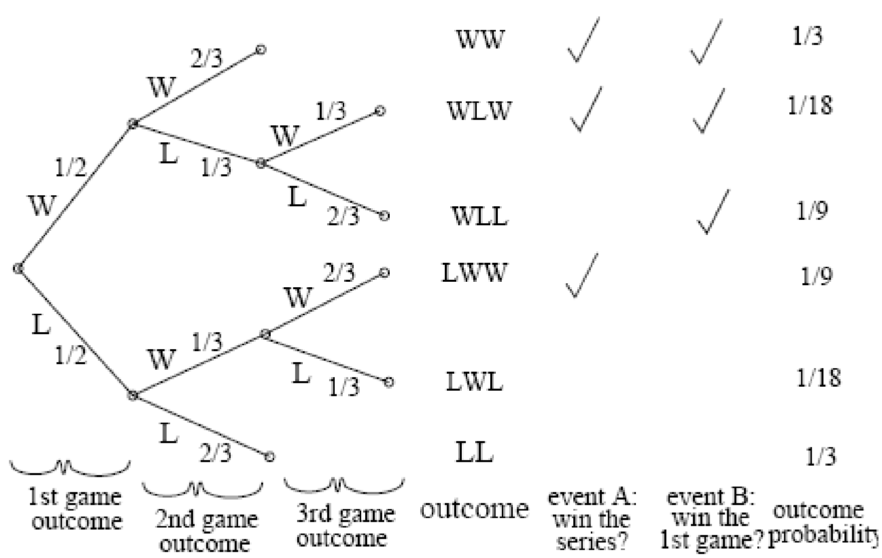
مسئله درنگ مسئله‌ای کانونی و غیر قابل تصمیم گیری در نظریه محاسبه است که اولین بار توسط آلن تورینگ که در مقاله اولیه‌اش در سال ۱۹۳۶ معرفی شد. مسئله این است که تعیین کنیم آیا یک ماشین تورینگ در یک مسئله بلا، بلا، بلا داده شده توقف می‌کند. به هر حال، با اهمیت خیلی فراتر، این نام دپارتمان MIT EECS معروف به تیم هاکی لیگ- C است.

در یکی از بهترین مسابقات قهرمانی سه‌گانه، مسئله درنگ اولین بازی را به احتمال ۱/۲ برنده می‌شود. در بازی‌های بعدی، احتمال پیروزی‌شان بوسیله پی‌آمد بازی قبلی تعیین می‌شود. اگر مسئله درنگ بازی قبلی را برده باشد، روحیه دارند تا پیروز شوند و این بازی را به احتمال ۲/۳ برنده می‌شوند. اگر بازی قبلی را باخته باشند، پس بخاطر شکست روحیه ندارند و بازی فعلی را

به احتمال فقط ۱/۳ برنده می‌شوند. چقدر احتمال دارد که مسئله درنگ مسابقات قهرمانی را فتح کند، با فرض بر اینکه اولین مسابقه را ببرند؟

این پرسش درباره احتمال مشروط است. فرض کنید که A رویدادی باشد که هالیتینگ پرابلم در مسابقات قهرمانی پیروز شود و فرض که B رویدادی است که اولین مسابقه را ببرند. هدف ما پس از آن تعیین احتمال مشروط $\Pr\{A|B\}$ است.

می‌توانیم به پرسش‌های احتمال مشروط درست شبیه به مسائل احتمال عادی چنگ اندازیم: با استفاده از نمودار درختی و شیوه چهار–مرحله‌ای. یک نمودار درختی کامل در پائین نشان داده شده است، با توضیحی درباره ساخت و کاربرد آن.



مرحله ۱: یافتن فضای نمونه

هر رأس داخلی نمودار درختی دو فرزند دارد، یکی متناظر است با برد هالیتنگ پرابلم (با برچسب W) و یکی متناظر است با باخت (با برچسب L).

فضای نمونه کامل عبارت است از:

$$S=\{WW, WLW, WLL, LWW, LWL, LL\}$$

مرحله ۲: تعیین رویدادهای مورد علاقه

رویدادی که هالتینگ پرابلم تمام مسابقات قهرمانی را برنده می‌شود عبارت است از:

$$T=\{WW, WLW, LWW\}$$

و رویدادی که هالتینگ پرابلم اولین مسابقه را برنده می‌شود عبارت است از:

$$F=\{WW, WLW, WLL\}$$

پی‌آمدهای این رویدادها در نمودار درختی به شکل تیک نشان گذاری شده‌اند.

مرحله ۳: تعیین احتمالات پی‌آمد

حالا می‌توانیم احتمال اینکه هالتینگ پرابلم در مسابقات قهرمانی برنده شود، با فرض بر اینکه اولین مسابقه را پیروز شوند، محاسبه کنیم:

$$\Pr\{A|B\}=\frac{\Pr\{A\cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

$$=\frac{\Pr\{\{WW, WLW\}\}}{\Pr\{\{WW, WLW, WLL\}\}}$$

$$= \frac{۱/۳ + ۱/۱۸}{۱/۳ + ۱/۱۸ + ۱/۹}$$

$$= \frac{۷}{۹}$$

آفرین بر ما! اگرهالتینگ پرابلم اولین مسابقه را ببرد، آن وقت تمام مسابقات قهرمانی را به احتمال ۷/۹ برنده می‌شوند.

۲. ۳ چرا نمودارهای درختی کارآیی دارند؟

اینک ما درون حل عادی مسائل احتمال با استفاده از نمودارهای درختی قرار گرفته‌ایم. ولی یک پرسش بزرگ را ناگفته رها کردیم: چه توجیه ریاضی در آن سوی تصاویر کوچک وجود دارد؟ چرا آنها کارآیی دارند؟

پاسخ مورد نظر احتمالات مشروط را درگیر می‌کند. در واقع، احتمالاتی که در یالهای نمودارهای درختی ثبت می‌کردیم همان احتمالات مشروط هستند. برای مثال، بالاترین مسیر موجود در نمودار درختی را برای هالتینگ پرابلم در نظر بگیرید، که متناظر است با پی‌آمد WW. اولین یال برچسب ۱/۲ خورده است، که احتمال برد هالتینگ پرابلم در مسابقه اول است دومین یال بر چسب ۲/۳ خورده است، که احتمال پیروزی هالتینگ پرابلم در دومین مسابقه است، به فرض که اولین مسابقه را برده باشند–به آن می‌گویند احتمال مشروط! خیلی کلی‌تر، روی هر یال نمودار درختی، احتمال اینکه آزمون (تجربه) از طول آن مسیر پیش بگیرد، با این فرض که به رأس منشأ برسد را ثبت می‌کنیم.

بنابراین در تمام مدت داشتیم از احتمال مشروط استفاده می‌کردیم. ولی چرا می‌توانیم احتمال‌های یال را در احتمال‌های پی‌آمد ضرب کنیم؟ برای مثال، نتیجه‌گیری کردیم که:

$$\Pr\{WW\} = \frac{۱}{۲}.\frac{۲}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۳}$$

چرا این صحیح است؟ پاسخ مورد نظر به تعریف احتمال مشروط بازی می‌گردد. بازنویسی آن به شکل کمی متفاوت قانون ضرب احتمالات را فراهم می‌کند:

تعریف ۱. ۳ (قانون ضرب برای ۲ رویداد). اگر $\Pr\{A_۲\} \neq ۰$ آنگاه:

$$\Pr\{A_۱ \cap A_۲\} = \Pr\{A_۱\}.\Pr\{A_۲ | A_۱\}$$

ضرب احتمالات یال در نمودار درختی برای برآورد طرف راست این معادلهاست. برای مثال:

Pr {پیروزی در مسابقه اول ∩ پیروزی در مسابقه دوم}

= Pr {برد در مسابقه اول} . Pr {برد در مسابقه دوم | برد در مسابقه اول}

$$= \frac{۱}{۲}.\frac{۲}{۳}$$

بنابراین قانون حاصل‌ضرب توجیه رسمی ضرب کردن احتمالات یال برای بدست آوردن احتمالات پی‌آمد است!

برای روشن ساختن احتمالات یال در طول مسیرهای درازتر، به شکلی کلی‌تر از قانون حاصل‌ضرب نیاز داریم:

تعریف ۲. ۳ (قانون حاصل‌ضرب برای n رویداد). اگر $\Pr\{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\} \neq 0$ آنگاه:

$$\Pr\{A_1 \cap \ldots \cap A_n\} = \Pr\{A_1\}.\Pr\{A_2 | A_1\}.\Pr\{A_3 | A_1 \cap A_2\}\ldots\Pr\{A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\}$$

بیائید این فورمول بزرگ را در عبارت‌های نمودار درختی توضیح دهیم. فرض کنید می‌خواهیم احتمال اینکه یک آزمون از مسیری به طول n از ریشه–به–برگ ویژه‌ای را محاسبه کنیم. به فرض که : A رویدادی باشد که آزمون از n تا یال مسیر می‌گذرد. سپس $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ رویدادی است که آزمون از کل مسیر عبور می‌کند. قانون حاصل‌ضرب می‌گوید که احتمال این عبارت از احتمال آن است که آزمون در نخستین زمان یال اول را می‌گیرد ضرب به این احتمال که دومین را می‌گیرد، به فرض که اولین یال را می‌گیرد، ضرب در احتمال سومین را می‌گیرد، به فرض که دو یال اولی را بگیرد و به همین ترتیب به سخن دیگر، احتمال یک پی‌آمد عبارت است از حاصل‌ضرب احتمالات یال در طول متناظر مسیر از برگ–به–ریشه.

۳ .٤ قانون احتمال کل

رابطه تساوی زیر

$$\Pr\{A\} = \Pr\{A | E\}.\Pr\{E\} + \Pr\{A | \overline{E}\}.\Pr\{\overline{E}\}.$$

قانون احتمال کل نامیده می‌شود و به شما اجازه می‌دهد احتمال اینکه رویداد A با استفاده از تجزیه حالت مبنی بر اینکه آیا رویداد E رخ می‌دهد یا نه را محاسبه کنید.

برای مثال، فرض کنید آزمون زیر را بررسی کنیم. ابتدا، سکه می‌اندازیم، اگر سر آمد آنگاه تاس می‌ریزیم و نتیجه را بر می‌داریم. اگر دُم آمد، سپس دوبار تاس می‌ریزیم و حاصل‌جمع دو نتیجه را می‌گیریم.

چقدر احتمال دارد که این فرایند به ۲ ختم شود؟ فرض کنید E رویدادی باشد که سکه با سر فرود آید و فرض که A رویدادی باشد که ۲ بدست می‌آوریم. با این تصور که سکه مورد نظر مناسب باشد، داریم $\Pr E\} = \Pr\{\overline{E}\} = ۱/۲$ اینک دو مورد پیش‌رو است. اگر سر نصیبمان شود، پس با یک تاس ۲ رخداد است. و احتمال اینکه تاس ۲ بیاید $\frac{۱}{۶}$ است. سپس $\Pr\{A|E\} = ۱/۶$. از طرف دیگر، اگر دُم گیرمان بیاید، آنگاه حاصل‌جمع ۲ از دو تاس به احتمال ۱/۳۶ است لذا $\Pr\{A|\overline{E}\} = \frac{۱}{۳۶}$ بنابراین، احتمال اینکه در کل فرآیند ۲ وقوع یابد عبارت است از

$$\Pr\{A\} = \frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۳۶} = \frac{۷}{۷۲}$$

به صورت کلی‌تر، اگر $E_۱,\ldots,E_n$ رویدادهای از هم جدا باشند که اتحادشان تمام فضای نمونه باشد، داریم:

$$\Pr\{A\} = \sum_{i=۱}^{n} \Pr\{A|E_i\}.\Pr\{E_i\}.$$

٤. ۳ احتمالات پسین

فرض کنید که پرسشی پوچ به نظر می‌رسد! با این همه، اگر هالتینگ پرابلم دوره مسابقات را برده باشد، برنده اولین مسابقه پیش از این معلوم است. بنابراین، پرسش درباره کسی که اولین مسابقه را برنده شد پرسشی واقعی است، نه یک پرسش احتمال. با این وجود، نظریه ریاضی ما درباره احتمال حاوی هیچ درکی از رویدادی پیش از رویداد دیگر نیست–ابداً مفهوم زمان در کار نیست. بنابراین، از یک چشم‌انداز ریاضی، این پرسش کاملاً معتبر است.

وهمچنین پرسشی معنادار از چشم اندازی عملی است. فرض کنید که به شما گفتند که هالتینگ پرابلم در دوره مسابقات پیروز شد، ولی نتیجه بازهای انفرادی را به شما نگفتند. آن گاه، از نقطه نظر خودتان، کاملاً معنادار است که تعجب کنید چقدر محتمل است که هالتینگ پرابلم در اولین مسابقه پیروز شده باشد.

احتمال مشروط $\Pr\{B|A\}$ پسین نامیده می‌شود اگر رویداد B پیش از رویداد A در زمان رخ بدهد. در اینجا تعدادی مثال دیگر درباره احتمال پسین می‌آوریم:

- احتمال اینکه امروز صبح ابری بود، به فرض که بعدازظهر باران بارید.
- احتمال اینکه من ابتدا به ساکن در باشگاه پوکر تگزاس با مسئولیت نامحدود با دو تا بی‌بی بازی کردم با فرض بر اینکه احتمالاً چهار ورق از یک نوع داشتم.

از دیدگاه ریاضی، احتمالات پسین فرقی با احتمالات معمولی ندارند؛ تمایز فقط در یک سطح فلسفه‌ای بالاتر است. تنها دلیل ما برای جلب توجه کردن به آنها این است که بگوئیم، "نگذارید شما را به پرگویی وادار کنند".

بیائید به مسئله اصلی برگردیم. احتمال اینکه هالتینگ پرابلم اولین مسابقه را برده، با این فرض که دوره مسابقات را پیروز شده عبارت است از $\Pr\{B|A\}$. می توانیم با استفاده از تعریف احتمال مشروط و نمودار درختی پیش گفته خودمان این را محاسبه کنیم:

$$\Pr\{B|A\} = \frac{\Pr\{B \cap A\}}{\Pr\{A\}}$$

$$= \frac{۱/۳ + ۱/۱۸}{۱/۳ + ۱/۱۸ + ۱/۹}$$

$$= \frac{۷}{۹}$$

این پاسخ مشکوک است! در بخش پیشین، نشان دادیم که $\Pr\{A|B\}$ هم عبارت بود از ۷/۹. آیا در کل می‌توانست صحیح باشد که $\Pr\{A|B\} = \Pr\{B|A\}$؟

کمی فکر کردن می‌رساند که این نامحتمل است. برای مثال، احتمال اینکه احساس پریشانی کنم، مفروض که توسط بیگانه‌ها ربوده شده باشم، بسیار زیاد است. ولی احتمال اینکه توسط بیگانه‌ها ربوده شده باشم، مفروض بر اینکه احساس پریشانی کنم، خیلی کمتر است.

بیائید شرایط عمومی که تحت آن $\Pr\{A|B\} = \Pr\{B|A\}$ را اجرا کنیم.

با توجه به تعریف احتمال مشروط این معادله صادق است اگر و فقط اگر:

$$\frac{\Pr\{A\cap B\}}{\Pr\{B\}}=\frac{\Pr\{A\cap B\}}{\Pr\{A\}}$$

این معادله، در جای خود صحیح است فقط اگر مخرج کسرها مساوی باشند یا صورت کسر ۰ باشد:

$$\Pr\{B\}=\Pr\{A\} \qquad \text{یا} \qquad \Pr\{A\cap B\}=0$$

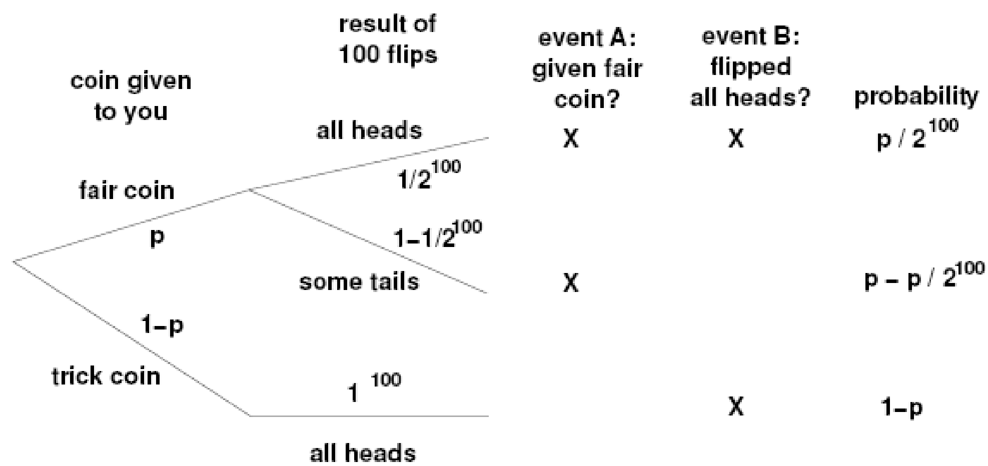
شرط سابق در مثال هاکی صادق است؛ احتمال اینکه هالتینگ پرابلم دوره مسابقات را ببرد (رویداد A) برابر است با احتمال اینکه در مسابقه اول پیروز شود (رویداد B). در واقع، هر دو احتمال ۱/۲ هستند.

۵. ۳ مسئله سکه

یک نفر سکه‌ای واقعی یا تقلبی که هر دو طرفش سر است به دستتان می‌دهد.

شما ۱۰۰ بار سکه را پرتاب می‌کنید و هر بار سر را می‌بینید. درباره احتمال اینکه سکه واقعی را پشت و رو کرده‌اید چه می‌توانید بگوئید؟ به صورت قابل توجهی— هیچ چیزی!

به منظور معنی‌دار کردن این قضیه بیادگرانه، بیائید مسئله را فورمول‌بندی کنیم. فضای نمونه در نمودار درختی زیر به کار رفته است. درباره این احتمال که در اصل سکه واقعی به شما داده شده اطلاعی نداریم– فقط به شما یک سکه نوعی داده شده است، بنابراین بیائید احتمال آن را p بنامیم.



فرض کنید A رویدادی باشد که سکه واقعی گیرتان آمده است و فرض کنید B رویدادی باشد که ۱۰۰بار با سر روبرو شده‌اید. حالا، داریم به دنبال $\Pr\{A|B\}$ می‌گیردیم، احتمال اینکه سکه واقعی دستتان رسیده است، به فرض که ۱۰۰تا سر زیرو رو کرده‌اید. احتمالات پی‌آمد در نمودار درختی به کار رفته‌اند. با داخل کردن نتایج با استفاده از تعریف مشروط داریم:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

$$= \frac{p/۲^{۱۰۰}}{۱ - p + \frac{p}{۲^{۱۰۰}}}$$

$$= \frac{p}{۲^{۱۰۰}(۱ - p) + p}$$

این گذاره برای مقادیر محدود p بدلیل وجود $۲^{۱۰۰}$ عبارت در مخرج کسر بسیار کوچک است. برای مثال، اگر $p = ۱/۲$ پس احتمال اینکه سکه اصلی را به شما داده باشند اساساً صفر است.

ولی ما که احتمال p که سکه اصل را به شما داده باشند. را نمی‌دانیم و شاید مقدار p کم نباشد؛ در واقع، ممکن است، چه بسا که $p = ۱ - ۲^{-۱۰۰}$ در آن صورت تقریباً یک شانس وجود دارد که سکه اصلی گیرتان آمده باشد، مفروض براینکه ۱۰۰ بار سر گیرتان آمده باشد. در واقع، چه بسا که سکه اصلی با احتمال $p = ۱$ به‌رستتان رسیده باشد. آنگاه احتمال اینکه سکه اصلی بدستتان آمده باشد، خوب، ۱ است!

مسئله مشابهی قبل از یک انتخابات در رأی‌گیری بروز می‌کند. یک نظر سنج انتخاباتی یک نفر آمریکایی را تصادفاً انتخاب می‌کند و از وابستگی حزبی آن آقا یا خانم سئوال می‌کند. اگر چنین فرایندی به دفعات، درباره جمعیت به عنوان یک کل تکرار شود چه می‌توان گفت؟ برای روشن ساختن همگونی، در نظر آورید که در کشور فقط دو نفر آدم وجود دارد. که یکی از این دو نفر جمهوری خواه است (مثل سکه تقلبی). نظرسنج انتخاباتی یک شهروند را به تصادف ۱۰۰بار انتخاب می‌کند. فرض کنید که هر یک بار جمهوری خواه را انتخاب می‌کند.

با این وجود، حتی با این داده‌های فرضی رأی‌گیری، احتمال اینکه در هر حزب یک شهروند که همچنان می‌تواند هر کجا باشد میان ۰ و ۱ وجود دارد!

آنچه نظرسنج انتخاباتی می‌تواند بگوید این است که یا:

۱. خلال انتخابات چیزی شبیه زمین لرزه سیاسی غیر محتمل روی داده است.

۲. دو نفر جمهوری خواه بودند.

این دورترین جایی است که نظریه احتمال می‌تواند ما را ببرد؛ از اینجا به بعد، باید نتیجه خود را مبنی بر تجارب زندگی بیرون بکشید، بسیار از مردم امکان دوم را پذیرفتنی‌تر می‌دانند.

با این وجود، اگر شما به درستی قانع شده‌اید که کشور تماماً جمهوری خواه نیست، (مثلاً، چونکه یک شهروند دمکرات هستید) پس چه بسا باور کنید که امکان اول عملاً محتمل‌تر است.

۶. ۳ آزمایش پزشکی

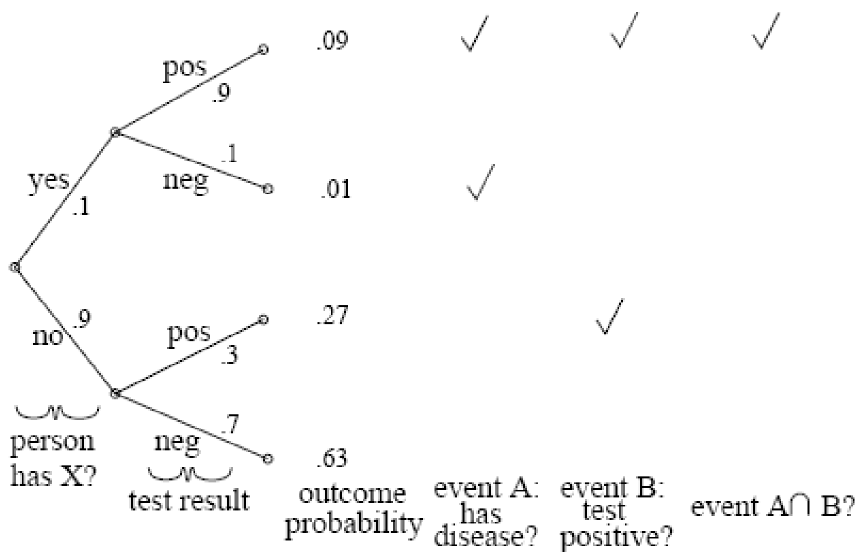
یک بیماری مرگ بار به نام X وجود دارد که ۱۰٪ جمعیت را مبتلا کرده است. هیچ علامتی هم در کار نیست، قربانی‌ها یک روزه سرنگون می‌شوند و می‌میرند. خوشبختانه، یک آزمایش برای تشخیص بیماری وجود دارد. آزمایش بی‌عیب و نقص نیست، با این وجود:

- اگر به این بیماری مبتلا باشید، یک شانس ۱۰٪ وجود دارد که آزمایش بیان کند که مبتلا نیستید. (اینها را "منفی مقلوب" می‌نامند.)
- اگر به بیماری مبتلا نباشید، یک شانس ۳۰٪ وجود دارد که آزمایش ثابت کند مبتلا هستید (اینها را "مثبت مقلوب" می‌نامند.)

تصادفی یک نفر برای این بیماری آزمایش می‌شود. اگر جواب آزمایش مثبت باشد، احتمال اینکه فرد مورد نظر بیماری را داشته باشد چقدر است؟

مرحله ۱: فضای نمونه را پیدا کنید

فضای نمونه با نمودار درختی زیر پیدا می‌شود:



مرحله ۲: روی دادهای منفعت را تعیین کنید

فرض کنید A رویدادی باشد که فرد مورد نظر مبتلا به بیماری است. در نظر بگیرید که B رویدادی باشد که آزمایش مثبت بوده است. پی‌آمدهای هر رویداد در نمودار درختی علامت گذاری شده‌اند. ما به دنبال یافتن $\Pr\{A|B\}$ هستیم، احتمال اینکه یک نفر به بیماری X مبتلاست، به فرض که پاسخ آزمایش مثبت بوده باشد.

مرحله ۳: احتمالات پی‌آمد را پیدا کنید

ابتدا، احتمالات را به یال‌ها اختصاص می‌دهیم این احتمالات مستقیماً از بیان مسئله بیرون آورده می‌شوند. با توجه به قانون حاصل‌ضرب، احتمال یک پی‌آمد عبارت است از حاصل‌ضرب احتمالات متناظر بر مسیر ریشه– به– برگ.

تمام احتمالات در نمودار نمایش داده شده‌اند.

مرحله ٤: احتمالات رویداد را محاسبه کنید

$$\Pr\{A|B\}=\frac{\Pr\{A\cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

$$=\frac{۰.۰۹}{۰.۰۹+۰.۲۷}$$

$$=\frac{۱}{۴}$$

اگر آزمایش‌تان مثبت باشد، پس فقط ۲۵٪ احتمال دارد که مبتلا به بیماری باشید! این پاسخ اساساً شگفت‌آور است، ولی فکرش را بکنید معنادار است. دو روش هست که پاسخ آزمایش شما مثبت باشد. نخست، اینکه شما بیمار باشید و آزمایش صحیح باشد.دوم، اینکه سالم باشید و آزمایش نادرست باشد. مسئله این است که تقریباً هر کسی سالم است، بنابراین، اکثر نتایج مثبت از آزمایش‌های غلط بر روی مردم تندرست ناشی می‌شود!

همچنین می‌توانیم احتمال اینکه آزمایش روی شخص تصادفی صحیح باشد را محاسبه کنیم.

این رویداد از دو پی‌آمد تشکیل می‌شود. شخص مورد نظر می‌تواند بیمار باشد و آزمایش مثبت (به احتمال ۰.۰۹) یا چه بسا آن شخص تندرست باشد و آزمایش منفی (احتمال ۰.۶۳) بنابراین، آزمایش با احتمال ۰.۷۲ = ۰.۶۳+۰.۰۹ صحیح است. این کار برجسته‌ای است، آزمایش تقریباً سه– ربع زمان درست است.

ولی صبر کنید! روشی ساده برای اینکه آزمایش را ۹۰٪ زمان تصحیح کنیم وجود دارد: همیشه نتیجه منفی را معکوس کنید! این "آزمایش" برای تمام مردم تندرست پاسخ صحیح می‌دهد و فقط برای ۱۰٪ از مردمی که عملاً مبتلا هستند پاسخ غلط می‌دهد. بهترین استراتژی این است که نتیجه آزمایش را ندیده بگیریم!

یک تناقض مشابه این هم در هواشناسی (پیش بینی وضع هوا) وجود دارد. در طول زمستان، تقریباً همه روزها در بوستون مرطوب و ابری هستند. پیش‌گویی هر روزه هوای مفلوک چه بسا بسیار درست‌تر از این است که واقعاً همین الان به آن رسیدگی کنیم.

۷. ۳ اتحادهای دیگر

رابطه‌ای نزدیک میان محاسبه یک مجموعه و محاسبه احتمال یک رویداد وجود دارد.

فورمول شمول– عدم شمول مثالی از این رابطه است! احتمال اتحاد رویدادها و تعداد عناصر اتحاد مجموعه‌ها با استفاده از فورمول‌های مشابه محاسبه می‌شوند.

در واقع، همه روش‌هایی که برای محاسبه تعداد اعضای مجموعه‌ها در پیش گرفتیم برای محاسبه احتمالات به کار می‌آیند. به این دلیل است که فضای احتمال فقط یک مجموعه موزون است؛ فضای نمونه همان مجموعه است و تابع احتمال وزنی را برای هر عضو اختصاص می‌دهد. پیش از این، تعداد عضوی موجود در یک مجموعه را محاسبه کردیم.

اینک، وقتی که احتمال یک رویداد را محاسبه می‌کنیم، درست در حال جمع‌بندی وزن عضوها هستیم. در طی هفته‌های آینده مثال‌های بسیاری از رابطه نزدیک میان احتمال و محاسبه را مورد توجه قرار خواهیم داد.

بسیاری از اتحادهای احتمال کلی وقتی که همه احتمالات بر رویداد مشروط هستند، نیز صدق می‌کنند. برای مثال، اتحاد زیر مشابه فورمول شمول– عدم شمول برای دو مجموعه است، که در آن تمام احتمالات بر یک رویداد C مشروط شده‌اند.

$$\Pr\{A \cup B | C\} = \Pr\{A | C\} + \Pr\{B | C\} - \Pr\{A \cap B | C\}.$$

به عنوان حالتی ویژه داریم

$$\Pr\{A \cup B | C\} = \Pr\{A | C\} + \Pr\{B | C\} \quad \text{اگر} \quad A \cap B = \varnothing.$$

مراقب باشید که قبل و بعد از علامت مشروط رویدادها را با هم قاطی نکنید!

قضیه نادرست.

$$\Pr\{A | B \cup C\} = \Pr\{A | B\} + \Pr\{A | C\} \qquad \text{اگر} \quad B \cap C = \varnothing \qquad (۱)$$

۵. استقلال

فرض کنید که دو سکه را هم زمان در دو طرف یک اتاق به هوا می‌اندازیم. از روی درک باطنی، شیوه‌ای که یک سکه به هنگام زمین خوردن دارد تأثیری بر سکه دیگری که زمین می‌خورد نمی‌گذارد. درک ریاضی که این حس درونی را در خود می‌گیرد استقلال نامیده می‌شود:

تعریف: رویدادهای A و B مستقل هستند اگر و فقط اگر:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\}.\Pr\{B\}$$

به طور کلی، استقلال چیزی است که فرض می‌کنید دارید پدیده‌ای را نمونه سازی می‌کنید یا آرزو می‌کنید می‌توانستید به طور واقعی فرض کنید. بسیاری از فورمول‌های مفید احتمال فقط در صورتی صادق هستند که برخی رویدادها مستقل باشند، بنابراین- استقلال- به مقدار زیادی می‌تواند تجزیه یک سیستم را ساده کند.

۱. ٤ مثال‌ها

بیائید به تجربه دو باز گردیم. فرض کنید A رویدادی باشد که سکه اول با سر بیاید و فرض کنید B رویدادی باشد که سکه دوم سر باشد. اگر فرض کنیم که A و B مستقل باشند، آنگاه احتمال اینکه هر دو سکه سر بیایند عبارت است از:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\}.\Pr\{B\}$$

$$= \frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۴}$$

از سوی دیگر، فرض کنید C رویدادی باشد که فردا هوا ابری است و R رویدادی که فردا بارانی باشد. چه بسا که $\Pr\{C\} = ۱/۵$ و $\Pr\{R\} = ۱/۱۰$.

اگر این رویدادها مستقل بودند، پس می‌توانستیم نتیجه بگیریم که احتمال یک روز بارانی و ابری کاملاً ناچیز بود:

$$\Pr\{R \cap C\} = \Pr\{R\}.\Pr\{C\}$$

$$= \frac{۱}{۵}.\frac{۱}{۱۰}$$

$$= \frac{۱}{۵۰}$$

متأسفانه، این رویدادها قطعاً مستقل نیستند؛ بویژه، هر روز بارانی ابری هم هست. بنابراین، احتمال یک روز بارانی و ابری عملاً ۱/۱۰ است.

٤ .۲ کار با استقلال

راه دیگری برای فکر کردن درباره استقلال هست که ممکن است آن را باطنی‌تر بیابید. براساس تعریف، رویدادهای A و B مستقل هستند اگر و فقط اگر

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\}.\Pr\{B\}.$$

این معادله صادق است حتی اگر $\Pr\{B\} = ۰$ ولی بر فرض که نباشد، می‌توانیم هر دو طرف را به $P\{B\}$ تقسیم کنیم و از تعریف احتمال مشروط برای بدست آوردن یک فورمول جایگزین استقلال استفاده کنیم:

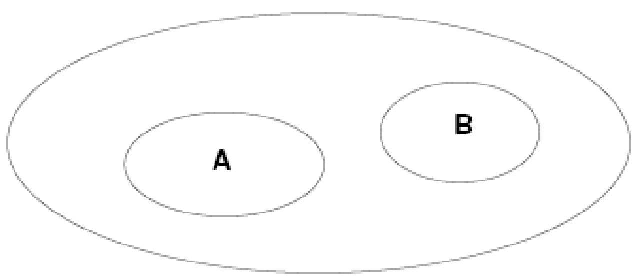
گزاره. اگر $\Pr\{B\} \neq ۰$ آنگاه رویدادهای A و B مستقل هستند اگر و فقط اگر

$$\Pr\{A|B\} = \Pr\{A\} \qquad (۲)$$

معادله (۲) مقرر می‌دارد که رویدادهای A و B مستقل هستند اگر احتمال A با این واقعیت که B رخ می‌دهد تغییر نکند. در این عبارت‌ها، دو سکه بالا انداخته شده بخش قبلی مستقل بودند، چون احتمال اینکه یک سکه سر بیاید با این واقعیت که سکه دیگر سر آمد، باشد تغییر نمی‌کند. در بازگشت به مثالی که زدیم، احتمال وجود ابر در آسمان بصورت نیرومندی با این واقعیت که داشت باران می‌بارید اثرپذیر است. بنابراین، همان طور که قبلاً یادآوری کردیم، این رویدادها مستقل نیستند.

۳. ٤ کمی حس باطنی

فرض کنید که A و B رویدادهای از هم جدا باشند، به نحوی که در تصویر زیر نشان داده شده است.



آیا این رویدادها مستقل هستند؟ بیائید بررسی کنیم. از یک سو، می‌دانیم

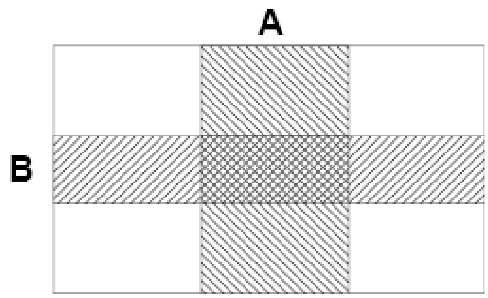
$$\Pr\{A \cap B\} = ۰$$

به این دلیل که $A \cap B$ هیچ پی‌آمدی ندارد. از دیگر سو، داریم

$$\Pr\{A\}.\Pr\{B\} > ۰$$

مگر در مواردی که A یا B احتمال صفر داشته باشد. بنابراین، از هم جدا بودن و استقلال عقاید بسیاری متفاوتی هستند.

در اینجا یک تصویر ذهنی بهتر از رویدادهای مستقل وجود دارد و که آنها شبیه چه چیز هستند.



فضای نمونه تمام مستطیل است. رویداد A خط راه راه عمومی است و رویداد B خط راه راه افقی است. در نظر بگیرید که احتمال هر رویدادی متناسب با حوزه خود در نمودار است. حالا اگر A یک کسر a از فضای نمونه پوشش دهد و B یک کسر b را پوشش دهد، آنگاه حوزه تقاطع منطقه $a.b$ است.

و به عبارت‌های احتمال:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\}.\Pr\{B\}$$

۶. استقلال متقابل

مشخص کرده‌ایم که دو رویداد که مستقل هستند به چه معناست ولی چطور می‌توانیم از استقلال حرف بزنیم وقتی که بیشتر از دو رویداد وجود دارد؟

برای مثال، چطور می‌توانیم بگوئیم که سمت و سوی n سکه تماماً مستقل از یکدیگر است؟

رویدادهای $E_1,\ldots,E_n$ مستقل هستند اگر و فقط اگر برای هر زیر مجموعه‌ای از رویدادها، احتمال اشتراکشان عبارت از حاصل‌ضرب احتمالات آنها باشد. به سخن دیگر، همه معادلات زیر باید درست باشند:

$$\Pr\{E_i \cap E_j\} = \Pr\{E_i\}.\Pr\{E_j\}$$ برای همه i, j متمایز

$$\Pr\{E_i \cap E_j \cap E_k\} = \Pr\{E_i\}.\Pr\{E_j\}\Pr\{E_k\}$$ برای همه i, j, k متمایز

$$\Pr\{E_i \cap E_j \cap E_k \cap E_l\} = \Pr\{E_i\}.\Pr\{E_j\}.\Pr\{E_k\}.\Pr\{E_l\}$$

برای همه i, j, k, lمتمایز

$$\Pr\{E_l \cap \ldots \cap E_n\} = \Pr\{E_l\}\ldots\Pr\{E_n\}$$

به عنوان یک مثال، اگر ۱۰۰ سکه را بالا بی‌اندازیم و فرض کنیم E_i رویدادی باشد که iام سکه با سر پائین بیایند، آنگاه ممکن است هوشمندانه فرض کنیم که $E_l,\ldots,E_{100}$. مستقل هستند.

۱. ۵ آزمایش *DNA*

این اقرارنامه دادگاه جنایی اُ– جی– سیمپسون در ۱۵ماه می ۱۹۵۵ است:

آقای کلارک: وقتی که این برآوردها از تواتر را رسیدگی می‌کنید– و من باور کنم که شما کی به مفهومی که نامش استقلال است دست زده‌اید؟

دکتر کاتن: بله، این کار را کردم.

آقای کلارک: و آن دیگری چیست؟

دکتر کاتن: یعنی اینکه در هر صورت یک ماترک را که دارید به ارث می‌برید.

– ما ترک دومی را که ممکن است بدست آورید متأثر نمی‌کند. یعنی که، اگر یک نوار که در اساس ۵.۰۰۰ جفتی باشد را به ارث ببرید، معنی‌اش این نیست که شما به طور خودبخودی یا با کمی احتمال در میان ٦.۰۰۰ یکی را به ارث ببرید. آنچه از یک ولی (پدر و مادر) به ارث ببرید همان چیزی است که از آن دیگری به ارث می‌برید. (حالی ات شد؟ – ریش سفید)

آقای کلارک: چرا آن مهم است؟

دکتر کاتن: از نظر ریاضی مهم است زیرا اگر آن حالت وجود نداشت، ضرب بسامدها میان محل‌های مختلف ژنتیک نادرست خواهد بود.

آقای کلارک: شما چگونه– خوب، قبل از هر چیز، آیا این نشانه گذاری‌هایی که در شهادت خود در این مورد شرح داده‌اید مستقل هستند؟

به هیئت منصفه گفته شده بود که نشانه گذاری‌های ژنتیک خون در صحنه جنایت با خون سیمپسون یکی است. از آن هم بیشتر، احتمال اینکه علامت گذاری‌های خونی که تصادفاً در شخصی منتخب ممکن بود پیدا شود حداکثر ۱در۱۷۰میلیون است. این تصور نجومی از محاسبه آماری به این نحو بدست آمده است:

- یک۱ نفر در میان ۱۰۰ نشانه A را دارد.
- یک۱ نفر در میان ۵۰ نشانه B را دارد.
- از هر ۴۰ نفر یک۱ نفر نشانه C را دارد.

- از هر ۵ نفر ۱نفر نشانه D را دارد.
- از هر ۱۷۰ نفر ۱ نفر نشانه E را دارد.

سپس این اعداد در هم ضرب شدند تا این احتمال که یک فرد تصادفاً منتخب را که هر پنج نشانه را در خود دارد بدست بدهد:

$$\Pr\{A\cap B\cap C\cap D\cap E\}=\Pr\{A\}.\Pr\{B\}.\Pr\{C\}.\Pr\{D\}.\Pr\{E\}$$

$$=\frac{۱}{۱۰۰}.\frac{۱}{۵۰}.\frac{۱}{۴۰}.\frac{۱}{۵}.\frac{۱}{۱۷۰}$$

$$=\frac{۱}{۱۷۰.۰۰۰.۰۰۰}$$

وکیل مدافع اشاره کرد که این استدلال بر این فرض استوار است که نشانه‌های خونی مستقلاً آشکار می‌شوند. وانگهی، کلیه آمارها فقط بر اساس چند صد نمونه خونی قرار داشتند. هیئت منصفه بطور گسترده‌ای به خاطر گرفتار شدن در مدرک DNA مورد تمسخر قرار گرفت. اگر شما عضو هیئت منصفه بودید، آیا محاسبه ۱در ۱۷۰میلیون را قبول می‌کردید؟

۲. ۵ استقلال دو به دو

تعریف استقلال به طرز وحشتناکی پیچیده به نظر می‌رسد– شرایط بسیاری وجود دارد! این هم مثالی که باریک بینی استقلال وقتی که بیش از دو رویداد وجود داشته باشند را توضیح می‌دهد و نیاز تمام آن شرایط را مشخص می‌کند.

فرض کنید که سه تا سکه را می‌اندازیم، سکه‌های دوبدو مستقل. رویدادهای زیر را معین کنید:

- A_1 رویدادی است که سکه ۱ با سکه ۲ یکسان شود.

- $A_۲$ رویدادی است که سکه ۲ با سکه ۳ یکسان شود.
- $A_۳$ رویدادی است که سکه ۳ با سکه ۱ یکسان شود.

آیا $A_۱, A_۲, A_۳$ مستقل هستند؟

فضای نمونه این آزمایش عبارت است از:

$$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

با توجه به فرض ما که سکه‌ها مستقل هستند هر پیامدی احتمال $۱/۸ = (۱/۲)^۳$ دارد.

برای اینکه ببینیم رویدادهای $A_۱, A_۲$ و $A_۳$ مستقل هستند، باید دنباله‌ای از تساوی‌ها را بررسی کنیم. محاسبه احتمال هر رویداد $A_۱$ کمک حال خواهد بود:

$$\Pr\{A_۱\} = \Pr\{HHH\} + \Pr\{HHT\} + \Pr\{TTH\} + \Pr\{TTT\}$$

$$= \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}$$

$$= \frac{۱}{۲}$$

با توجه به تقارن $\Pr\{A_۲\} = \Pr\{A_۳\} = ۱/۲$ هم درست است. حالا می‌توانیم همه تساوی‌های مورد نیاز استقلال را بررسی کنیم.

$$\Pr\{A_۱ \cap A_۲\} = \Pr\{HHH\} + \Pr\{TTT\}$$

$$= \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}$$

$$= \frac{۱}{۴}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$\Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}$$

با توجه به تقارن $\Pr\{A_1 \cap A_3\} = \Pr\{A_1\}.\Pr\{A_3\}$ و

$$\Pr\{A_2 \cap A_3\} = \Pr\{A_2\}.\Pr\{A_3\}$$

همچنین باید صدق کند. سرانجام، باید یک شرط نهایی را بررسی کنیم:

$$\Pr\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} = \Pr\{HHH\} + \Pr\{TTT\}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\neq \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\} = \frac{1}{8}$$

سه رویداد A_1, A_2 و A_3 مستقل نیستند، حتی در صورتی که همه جفت رویدادها مستقل باشند!

مجموعه‌ای از رویدادها دو به دو مستقل است که هر جفت مستقل باشد. استقلال دو به دو خصوصیتی ضعیف از استقلال است. برای مثال، فرض کنید که شاکیان در دادگاه اُ– جی– سیمپسون اشتباه کردند و نشانه‌های A, B, C, D و E فقط به صورت دو به دو مستقل ظاهر می‌شوند. سپس احتمال اینکه یک فرد تصادفی انتخاب شده همه پنج نشانه را داشته باشد بیش از این نخواهد بود:

$$\Pr\{A \cap B \cap C \cap D \cap E\} \le \Pr\{A \cap E\}$$
$$= \Pr\{A\}.\Pr\{E\}$$
$$= \frac{١}{١٠٠}.\frac{١}{١٧٠}$$
$$= \frac{١}{١٧.٠٠٠}$$

خط اول از این حقیقت که $A \cap B \cap C \cap D \cap E$ زیر مجموعه‌ای از $A \cap E$ است استفاده می‌کند. (نشانه‌های A و E را انتخاب کردیم زیرا نادرترین‌اند). در خط دوم از استقلال دو به دو استفاده می‌کنیم. اینک احتمال یکسانه تصادفی ١ به ١٧.٠٠٠ است– فاصله زیادی از ١نفر در ١٧٠میلیون است! و این قوی‌ترین نتیجه‌ای است که فقط با فرض استقلال دو به دو می‌توانیم به آن برسیم.