فصل یازدهم

تابع های مولد

توابع مولد یکی از جالب‌ترین و شگفت انگیزترین اختراعات مفید در ریاضیات گسسته است. به طور محکم اگر بگوئیم، توابع مولد مسائل درباره دنباله‌ها را به مسائلی درباره تابع‌ها تبدیل می‌کند. این که عالی است چون که ما خروارها دستگاه‌های ریاضی برای دست‌کاری تابع‌های در اختیار داریم. به لطف تابع‌های مولد، می‌توانیم تمام آن ماشین آلات را برای مسائل دنباله‌ها به کار ببریم. در این روش، می‌توانیم با استفاده از توابع مولد همه گونه‌های مسائل محاسباتی را حل کنیم.

مقدار بسیار هنگفتی از ریاضیات درباره توابع مولد هست، بنابراین فقط مقدار کمی از موضوع را مطرح می‌کنیم.

در این یادداشت‌ها، دنباله‌ها را در برای تشخیص بهتر و بیشتر درون کروشه قرار می‌دهیم تا از بسیاری دیگر از گزاره‌هایی که در اطراف شناورند مشخص باشند.

۱. توابع مولد

تابع مولد معمولی برای دنباله‌های متناهی عبارت است از دنباله توانی:

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \ldots$$

همه توابع مولد معمولی نیستند، ولی در اینجا فقط آن نمونه را ملاحظه خواهیم کرد.

تابع مولد عبارت است از یک دنباله توانی "رسمی" به همان معنایی که x را بصورت یک جانشین در نظر می‌گیریم نه یک عدد. فقط در موارد معدود است که عملاً یک تابع مولد را با فرض بر اینکه x یک عدد باشد ارزیابی می‌کنیم، بنابراین در کل موضوع همگرائی را ندیده می‌گیریم. از خلال این یادداشت‌ها، تناظر میان یک دنباله و تابع مولدش را با یک فلش دو پیکانی به شکل زیر را نشان خواهیم داد:

$$\left(g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots\right) \leftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \ldots$$

برای مثال، دراینجا تعدادی دنباله و تابع مولدهایشان وجود دارد:

$$< 0,0,0,0,\ldots > \leftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots = 0$$

$$< 1,0,0,0,\ldots > \leftrightarrow 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots = 1$$

$$< 3,2,1,0,\ldots > \leftrightarrow 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + \ldots = 3 + 2x + x^2$$

الگویی که اینجاست ساده است: تا این عبارت موجود در دنباله (اندیکس گذاری از ۰) ضریب x^i در تابع مولد است.

دوباره به یاد بیاورید که حاصل‌جمع یک دنباله هندسی متناهی عبارت است از:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

این معادله هنگامی که $|z|\geq 1$ صدق نمی‌کند، ولی همان طور که اشاره شد، درباره موضوع همگرائی نگران نیستیم. این فورمول توابع مولد اشکال بسته را برای یک طیف کامل دنباله‌ها به دست می‌دهد. برای مثال،

$$(1,1,1,1,\ldots)\leftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\ldots \qquad =\frac{1}{1-x}$$

$$(1,-1,1,-1,\ldots)\leftrightarrow 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots \quad =\frac{1}{1+x}$$

$$(1,a,a^2,a^3,\ldots)\leftrightarrow 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots=\frac{1}{1-ax}$$

$$(1,0,1,0,1,0,\ldots)\leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$$

۲. عملیات در تابع‌های مولد

جادوی تابع‌های مولد در این است که می‌توانیم هرنوع کار روی دنباله‌ها را با اجرای عملیات ریاضی بر روی تابع‌های مولد وابسته انجام دهیم. بیائید با عملیات متفاوت آزمایش کنیم و تأثیراتشان را در عبارت‌های دنباله مشخص کنیم.

۱. ۲ قیاس

ضرب یک تابع مولد در عددی ثابت معادل ضرب عبارت در دنباله وابسته در همان ثابت است. برای مثال در بالا یادآوری کردیم که:

$$(1,0,1,0,1,0,\ldots)\leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$$

با ضرب تابع مولد در ۲ بدست می‌آید:

$$\frac{۲}{۱-x^{۲}}=۲+۲x^{۲}+۲x^{۴}+۲x^{۶}+\dots$$

که این دنباله را ایجاد می‌کند:

$$\left(۲,\circ,۲,\circ,۲,\circ,\dots\right)$$

قانون ۱ (قانون مقیاس). اگر

$$\left(f_{\circ},f_{۱},f_{۲},\dots\right)\leftrightarrow F\left(x\right),$$

پس

$$\left(cf_{\circ},cf_{۱},cf_{۲},\dots\right)\leftrightarrow c.F\left(x\right).$$

تفکر آن سوی این قانون این است که:

$$\begin{aligned}\left(cf_{\circ},cf_{۱},cf_{۲},\dots\right)&\leftrightarrow cf_{\circ}+cf_{۱}x+cf_{۲}x^{۲}+\dots\\&=c.\left(f_{\circ}+f_{۱}x+f_{۲}x^{۲}+\dots\right)\\&=cF\left(x\right)\end{aligned}$$

۲. ۲ جمع

جمع تابع‌های مولد با جمع دو دنباله عبارت به عبارت مطابق است. برای مثال، جمع کردن دو تا از مثال‌های پیشین بدست می‌دهد:

$$\left(۱,۱,۱,۱,۱,۱,\dots\right)\leftrightarrow\frac{۱}{۱-x}$$

$$\begin{array}{r} + \quad (1,-1,1,-1,1,-1,\ldots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} \\ \hline (2,0,2,0,2,0,\ldots) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

هم اینک دو گزاره متفاوت را مشتق کرده‌ایم که هر دو، دنباله $(2,0,2,0,\ldots)$ را بوجود می‌آورند. البته، آنها – مساویند:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

قانون ۲ (قانون جمع). اگر

$$(f_0, f_1, f_2, \ldots) \leftrightarrow F(x), \qquad \text{و}$$

$$(g_0, g_1, g_2, \ldots) \leftrightarrow G(x).$$

آن‌گاه

$$(f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots) \leftrightarrow F(x) + G(x).$$

عقیده آن سوی این قانون این است که:

$$\begin{aligned} (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots) &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) \\ &= F(x) + G(x) \end{aligned}$$

۳.۲ انتقال صحیح (جا به جایی راست)

بیائید باز هم با یک دنباله ساده و تابع مولد آن کار را شروع کنیم:

$$(1,1,1,1,\dots) \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

حالا بیائید با افزودن k، ۰ دنباله مورد نظر را به راست انتقال دهیم:

$$\left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{k\text{صفر}},1,1,1,\dots\right) \leftrightarrow x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} + \dots$$

$$= x^k.\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{x^k}{1-x}$$

بطور آشکارگزاره: افزودن k صفر پیش‌رو به دنباله مطابقت دارد با ضرب تابع مولد در x^k به طور کلی صحیح است.

قانون ۳ (قانون انتقال– راست). اگر $F(x) \leftrightarrow (f_0, f_1, f_2, \dots)$ پس:

$$\left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{k\text{صفر}}, f_0, f_1, f_2, \dots\right) \leftrightarrow x^k.F(x)$$

ایده پشت این قانون این است که:

$$\left(\overbrace{0,0,\dots,0}^{k\text{صفر}}, f_0, f_1, f_2, \dots\right) \leftrightarrow f_0 x^k + f_1 x^{k+1} + f_2 x^{k+2} + \dots$$

$$= x^k.\left(f_0 + f_1 + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots\right)$$

$$= x^k.F(x)$$

٤. ۲ مشتق‌گیری

چه اتفاقی می‌افتد اگر از تابع مولد مشتق بگیریم؟ به عنوان مثال، بیائید از تابع مولد فعلاً آشنا برای یک دنباله نامتناهی ۱ها مشتق بگیریم.

$$\frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$1+2x+3x+4x+\dots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(1,2,3,4,\dots)\leftrightarrow\frac{1}{(1-x)^2}$$

یک تابع مولد برای دنباله $(1,2,3,4,\dots)$ متعلق به اعداد صحیح مثبت پیدا کردیم!

در کل، مشتق یک تابع مولد دو تأثیر بر دنباله متناظر دارد: هر عبارت ضرب در اندیس خود و تمامی دنباله به اندازه یک مکان جابه جا می‌شود.

قانون ٤ (قانون مشتق). اگر

$$(f_0,f_1,f_2,f_3,\dots)\leftrightarrow F(x),$$

آن‌گاه

$$(f_1,2f_2,3f_3,\dots)\leftrightarrow F'(x).$$

تفکر آن سوی این قانون یعنی که:

$$(f_1,2f_2,3f_3,\dots)\leftrightarrow f_1+2f_2x+3f_3x^2+\dots$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f_۰ + f_۱x + f_۲x^۲ + f_۳x^۳ + \ldots \right)$$

$$= \frac{d}{dx}F\left(x \right)$$

قانون مشتق بسیار مفید است. در واقع، نیازی مستقل و مکرر برای هر یک از دو تأثیر دیفرانسیل‌گیری وجود دارد، عبارت‌ها را در اندیس‌شان ضرب کردن و یک مکان به چپ – بردن. نوعاً، فقط یک تأثیر را می‌خواهیم و باید به نحوی آن دیگری را ملغی کنیم. برای مثال، بیائید برای پیدا کردن تابع مولد متعلق به دنباله مربع‌های $(۰,۱,۴,۹,۱۶,\ldots)$ تلاش کنیم. اگر می‌توانستیم با دنباله $(۱,۱,۱,۱,\ldots)$ شروع کنیم وهر عبارت را دو بار در اندیس خود ضرب کنیم، نتیجه مطلوب را بدست می‌آوردیم:

$$\left(۰.۰,۱.۱,۲.۲,۳.۳,\ldots \right) = \left(۰,۱,۴,۹,\ldots \right)$$

یک چالش در این است که دیفرانسیل‌گیری نه تنها هر عبارت را در اندیس خود ضرب می‌کند، بلکه همچنین تمام دنباله را یک مکان به سمت چپ جا به جا می‌کند. با این حال، قانون انتقال به راست ۳ بیان می‌کند که چگونه این جا به جایی – به چپ ناخواسته را ملغی کنیم: تابع مولد را ضرب در x کنید.

بنابراین، روش کار ما، شروع با تابع مولد برای $(۱,۱,۱,۱,\ldots)$ دیفرانسیل گرفتن، ضربدر x کردن و سپس دیفرانسیل‌گیری و یک بار دیگر ضربدر x کردن است.

$$\left(۱,۱,۱,۱,\ldots \right) \leftrightarrow \frac{۱}{۱ - x}$$

$$(1,2,3,4,\ldots) \leftrightarrow \frac{d}{dx}\ \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(0,1,2,3,\ldots) \leftrightarrow x.\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$(1,4,9,16,\ldots) \leftrightarrow \frac{d}{dx}\ \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$(0,1,4,9,\ldots) \leftrightarrow x.\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

با این حساب، تابع مولد برای مربع‌ها از این قرار است:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

۵. ۲ حاصل‌ضرب‌ها

قانون ۵ (قانون حاصل ضرب) اگر:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(x), \quad \text{و}$$

$$(b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(x),$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$(c_0, c_1, c_2, \ldots) \leftrightarrow A(x).B(x).$$

در جایی که:

$$c_n ::= a_0\ \ b_n + a_1\ \ b_{n-1} + a_2\ \ b_{n-2} + \ldots + a_n\ \ b_0.$$

برای فهمیدن این قانون فرض کنید

$$c(x) ::= A(x).B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

می‌توانیم حاصل‌ضرب $A(x).B(x)$ را با استفاده از یک جدول برای تعیین تمام عبارت‌های متقاطع از حاصل‌ضرب حاصل‌جمع‌ها محاسبه کنیم.

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	$\ldots$
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	$\ldots$
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	$\ldots$	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$\ldots$		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	$\ldots$			
$\vdots$	$\ldots$				

توجه کنید که همه عبارت‌هایی که شامل همان توان x هستند به یک شیب متکی هستند. با یکی کردن این عبارت‌ها با هم، متوجه می‌شویم که ضریب x^n در حاصل‌ضرب عبارت است از حاصل‌جمع کلیه عبارت‌ها بر اولین $(n+1)$ قطر، مثلاً

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0. \qquad (1)$$

گزاره (۱) ممکن است از نظر علامت دوره جاری آشنا باشد؛ دنباله $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ تلفیق دنباله‌های $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ و $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ است.

۳. دنباله فیبوناچی

گاهی اوقات می‌توانیم تابع‌های مولد خوبی برای دنباله‌های پیچیده‌تر پیدا کنیم. برای مثال، در اینجا یک تابع مولد برای اعداد فیبوناچی ارائه می‌شود:

$$(۰,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,\ldots) \leftrightarrow \frac{x}{۱-x-x^{۲}}$$

انصافاً که اعداد فیبوناچی ممکن است گروهی کریه به نظر آیند، ولی تابع مولد ساده است!

قصد داریم این تابع مولد را منشق سازیم و سپس برای یافتن یک شکل بسته برای nامین اعداد فیبوناچی از آن استفاده کنیم. تکنیک هایی که به کار خواهیم برد برای گروه بزرگی از معادلات باز گشتی قابل کاربری هستند.

۱. ۳ یافتن یک تابع مولد

بیائید با یادآوری تعریف اعداد فیبوناچی شروع کنیم:

$$f_۰ = ۰$$

$$f_۱ = ۱$$

$$f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲} \qquad (\text{برای } n \geq ۲)$$

می‌توانیم آخرین عبارت را به دنباله نامتناهی معادلات گسترش دهیم. با این قرار، اعداد فیبوناچی اینچنین معین می‌شوند:

$$f_۰ = ۰$$

$$f_۱ = ۱$$

$f_2 = f_1 + f_0$

$f_3 = f_2 + f_1$

$f_4 = f_3 + f_2 \rightarrow$ (اینجا دیگه ... خود فیبوناچی!)

$\vdots$

اینک تمامیت طرح در این است که تابعی $F(x)$ را معین نمود که دنباله‌ای را در سمت چپ تساوی ایجاد کند، که همان اعداد فیبوناچی باشند.

سپس تابعی را که دنباله سمت راست را ایجاد کند استخراج می‌کنیم. سرانجام، دو طرف را مساوی فرض می‌کنیم و $F(x)$ را حل می‌کنیم. بیائید این امتحان را انجام دهیم، ابتدا، تعیین می‌کنیم:

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \ldots$$

حالا به استخراج تابع مولد برای دنباله نیاز داریم:

$$(0, 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, f_3 + f_2, \ldots)$$

یک طرز کار این است که این را به صورت حاصل‌جمع سه دنباله‌ای که با آن تابع مولد را می‌شناسیم بشکنیم و سپس قانون به اضافه را به کار ببریم:

$$\begin{array}{l}
(0,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\ \ldots) \leftrightarrow x \\
(0,\quad f_0,\quad f_1,\quad f_2,\quad f_3,\ \ldots) \leftrightarrow xF(x) \\
\underline{+(0,\quad 0,\quad f_0,\quad f_1,\quad f_2,\ \ldots) x^2F(x)} \\
(0,\ 1 + f_0,\ f_1 + f_0,\ f_2 + f_1,\ f_3 + f_2, \ldots) \leftrightarrow x + xF(x) + x^2F(x)
\end{array}$$

این دنباله تقریباً با معادلات سمت راست فیبوناچی شبیه است. تنها عیب آن در این است که عبارت دوم به جای اینکه به سادگی ۱ باشد $f_\circ + ۱$ است. با این همه، این مقدار به هیچ است، از آنرو که $f_\circ = \circ$ است.

حالا اگر $F(x)$ را با تابع جدید $x + xF(x) + x^۲F(x)$ مساوی فرض کنیم، سپس به طور تلویحی همه معادلاتی که اعداد فیبوناچی را در یک وهله معین می‌کنند، یادداشت می‌کنیم:

$$F(x) \;= f_\circ + f_۱x + f_۲x^۲ + f_۳x^۳ + f_۴x^۴ + \ldots,$$

$$x + xF(x) + x^۲F(x) = \circ + (۱ + f_\circ)x + (f_۱ + f_\circ)x^۲ + (f_۲ + f_۱)x^۳ + (f_۳ + f_۲)x^۴$$

حل کردن $F(x)$ تابع مولد را برای دنباله فیبوناچی فراهم می‌کند:

$$F(x) = x + xF(x) + x^۲F(x)$$

$$F(x) = \frac{x}{۱ - x - x^۲}.$$

با اطمینان کافی، این همان تابع مولدی است که در آغاز آن را ارائه کردیم.

۲. ۳ پیدا کردن شکل بسته

چرا یک نفر باید به تابع مولد برای دنباله اهمیت بدهد؟ چندین پاسخ وجود دارند، که این یکی است: اگر بتوانیم یک تابع مولد برای دنباله پیدا کنیم، سپس غالباً می‌توانیم یک شکل بسته برای nامین ضریب پیدا کنیم– که می‌تواند حسابی مفید باشد! برای مثال، یک شکل بسته برای ضریب x^n در دنباله‌های توانی برای $x/(۱-x-x^۲)$ فورمولی آشکار (روشن) برای nامین اعداد فیبوناچی خواهد بود.

بنابراین کار بعدی ما بیرون کشیدن ضریب‌ها از تابع مولد است. چندین راه حل وجود دارد. برای یک تابع مولد که عبارت چند جمله‌ای گویا است، می‌توانیم از روش کسر جزئی استفاده کنیم، همان که در محاسبات یاد گرفتید. درست همان طور که عبارت‌های موجود در گسترش کسرهای جزئی برای انتگرال‌گیری آسان‌تر هستند، ضریب‌های آن عبارت‌ها برای محاسبه آسان هستند.

بیائید این روش را با تابع مولد برای اعداد فیبوناچی امتحان کنیم. در ابتدا، مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$۱-x-x^{۲}=(۱-a_{۱}x)(۱-a_{۲}x)$$

جایی که $a۱=\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۵}), a_{۲}=\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{۵})$. سپس $A_{۱}$ و $A_{۲}$ را پیدا می‌کنیم که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{x}{۱-x-x^{۲}}=\frac{A_{۱}}{۱-a_{۱}x}+\frac{A_{۲}}{۱-a_{۲}x}$$

ما این کار را با مقادیر مختلف x انجام می‌دهیم تا در $A_{۱}$ و $A_{۲}$ رابطه خطی ایجاد کنیم. سپس می‌توانیم $A_{۱}$ و $A_{۲}$ را با حل یک سیستم خطی پیدا کنیم. نتیجه می‌شود:

$$A۱=\frac{۱}{a_{۱}-a_{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$A۲=\frac{-۱}{a_{۱}-a_{۲}}=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

با جا به جایی به درون معادله بالا کسر جزئی گسترده $F(x)$ بدست می‌آید:

$$\frac{x}{۱-x-x^{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱}{۱-a_{۱}x}-\frac{۱}{۱-a_{۲}x}\right)$$

هر عبارت موجود در گسترده کسرهای جزئی یک دنباله توانی ساده دارد که توسط فورمول حاصل‌جمع هندسی بدست آمده است:

$$\frac{۱}{۱-a_{۱}x}=۱+a_{۱}x+a_{۱}^{۲}x^{۲}+\ldots$$

$$\frac{۱}{۱-a_{۲}x}=۱+a_{۲}x+a_{۲}^{۲}x^{۲}+\ldots$$

جا به جایی این دنباله‌ها یک دنباله توانی برای تابع مولد به دست می‌دهد:

$$F(x)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱}{۱-a_{۱}x}-\frac{۱}{۱-a_{۲}x}\right)$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\left(۱+a_{۱}x+a_{۱}^{۲}x^{۲}+\ldots\right)-\left(۱+a_{۲}x+a_{۲}^{۲}x^{۲}+\ldots\right)\right)$$

بنابراین

$$f_{n}=\frac{a_{۱}^{n}-a_{۲}^{n}}{\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n}\right)$$

این فورمول ممکن است حیرت‌آور باشد– حتی معلوم هم نیست که ارزش آن یک عدد صحیح باشد – ولی بسیار سودمند است. برای مثال، یک راه بسیار مفیدتری را (از طریق روش مجذور

مکرر) برای محاسبه اعداد فیبوناچی نسبت به خرد و تکه کردن از خلال تراجع ارائه می‌کند و همچنین به روشنی رشد توانی این اعداد را آشکار می‌کند.

٤. محاسبه با تابع‌های مولد

تابع های مولد در کل برای حل مسائل محاسباتی مفید هستند. بویژه، مسائلی که در انتخاب آیتم‌هایی از یک مجموعه درگیر هستند، اغلب به تابع‌های مولد خوبی با فرض براینکه ضریب x^n تعداد راه‌هایی برای انتخاب nامین آیتم باشد، منجر می‌شود.

٤ .۱ انتخاب آیتم‌های مجزا از هم از یک مجموعه

تابع مولد برای ضریب‌های دو جمله‌ای مستقیماً از فرضیه دو جمله‌ای تبعیت می‌کند:

$$\left\langle \binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots \binom{k}{k}, 0, 0, 0, \ldots \right\rangle \leftrightarrow \binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \ldots + \binom{k}{k}x^k$$

$$= (1+x)^k$$

بنابراین، ضریب x^n در $(1+x)^k$ عبارت است تعداد راه‌های انتخاب n آیتم از هم جدا از مجموعه‌ای به اندازه k. برای مثال، ضریب x^2 عبارت است از $\binom{k}{2}$، تعداد روشهایی برای انتخاب ۲ آیتم از یک مجموعه n عضوی به همین سان هم، ضریب x^{K+1} عبارت است از تعداد روشهایی برای انتخاب $k+1$ آیتم از یک مجموعه به اندازه k که عبارت از صفر است.

۲. ٤ ساختن تابع مولد برای شمارش

اغلب می‌توانیم توصیف یک مسئله محاسباتی را مستقیماً برای حل به یک تابع مولد برگردانیم. برای مثال، می‌توانستیم تصور کنیم که $(۱+x)^k$ تعداد روش‌هایی برای انتخاب n آیتم از هم جدا از یک زیر مجموعه k عضوی را بدون توسل جستن به فرضیه دو جمله‌ای یا حتی بدون قاطعی شدن با ضریب‌های دو جمله‌ای ایجاد می‌کند!

چگونگی‌اش اینجاست. در ابتدا، یک مجموعه تک – عضوی $\{a_۱\}$ را در نظر بگیرید تابع مولد برای تعداد روش‌های انتخاب n عضو از این مجموعه به سادگی از قرار $۱+x$ است: ۱روش برای انتخاب صفر عضو داریم، ۱روش برای انتخاب یک عضو و ٥روش برای انتخاب بیش از یک عضو داریم، به طور مشابه، تعداد روشهایی که برای انتخاب n عضو از مجموعه $\{a_۲\}$ توسط تابع مولد $۱+x$ ارائه می‌شود. این واقعیت که عناصر در دو حالت بالا مختلف هستند مهم نیست.

اینک راه حل اصلی از این قرار است: تابع مولد برای انتخاب عناصری از اتحاد مجموعه‌های از هم جدا عبارت است از حاصل‌ضرب تابع‌های مولد برای انتخاب از هر مجموعه. در یک آن این موضوع را توجیح خواهیم کرد، ولی بیائید ابتدا به یک مثال توجه کنیم. طبق این اصل، تابع مولد برای تعداد روش‌های انتخاب n عضو از $\{a_۱,a_۲\}$ عبارت است از:

$$\underbrace{(۱+x)}_{\text{تابع مولد برای } \{a_۱\}}\cdot\underbrace{(۱+x)}_{\text{تابع مولد برای } \{a_۲\}}=\underbrace{(۱+x)^۲}_{\text{تابع مولد برای } \{a_۱,a_۲\}}=۱+۲x+x^۲$$

مطمئناً، برای مجموعه $\{a_1,a_2\}$ ۱روش برای انتخاب صفر عضو، ۲روش برای انتخاب یک عضو، ۱روش برای انتخاب دو عضو و ۰روش برای انتخاب بیش از دو عضو در اختیار داریم.

به‌کارگیری مکرر این قانون تابع مولد برای انتخاب n آیتم از یک مجموعه k عضوی $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ به دست می‌دهد:

$$\underbrace{(1+x)}_{\substack{\text{تابع مولد برای}\\ \{a_1\}}}.\underbrace{(1+x)}_{\substack{\text{تابع مولد برای}\\ \{a_2\}}}\dots\underbrace{(1+x)}_{\substack{\text{تابع مولد برای}\\ \{a_k\}}}=\underbrace{(1+x)^k}_{\substack{\text{تابع مولد برای}\\ \{a_1,a_2,\dots,a_k\}}}$$

این همان تابع مولدی است که با استفاده از قضیه دوجمله‌ای به آن رسیدیم. ولی این بار دیگر مستقیماً از مسئله محاسباتی به تابع مولد رسیدیم.

می‌توانیم این عقاید را به یک اصل کلی بگسترانیم:

قانون ٦ (قانون تلفیق)

فرض کنید $A(x)$ تابع مولدی برای انتخاب آیتم‌هایی از مجموعه A باشد و فرض کنید $B(x)$ تابع مولدی برای انتخاب آیتم‌هایی از مجموعه B باشد. اگر B و A از هم جدا باشند، سپس تابع مولد برای انتخاب آیتم‌هایی از اتحاد $A\cup B$ حاصل‌ضرب $A(x).B(x)$ است.

این قانون بیشتر دو پهلو است: دقیقاً چه قوانینی بر انتخاب آیتم‌هایی از یک مجموعه حکم می‌رانند؟ به طور قابل ملاحظه‌ای، قانون تلفیق تحت بسیاری از تفسیرهای انتخاب معتبر می‌ماند، برای مثال، می‌توانستیم مصر باشیم که آیتم‌های جدا از هم انتخاب شوند یا می‌توانستیم اجازه دهیم همان آیتم را به تعداد محدود دفعه انتخاب شود. به صورت غیر رسمی، تنها محدودیت‌ها از

این قرارند که (۱) ترتیبی که ترتیب در آیتم‌های منتخب نادیده گرفته می‌شود و (۲) محدودیت‌هایی در انتخاب آیتم‌هایی از مجموعه‌های A,B همچنین در گزینش آیتم‌های از $A \cup B$ به کار می‌روند. (رسماً، باید یک نگاشت دوسویی میان گزینش‌های n عضوی از $A \cup B$ و جفت‌های منظم گزینش‌هایی از B و A که حاوی n عناصر جامع‌اند وجود داشته باشد.)

به منظور شمارش تعداد روش‌ها برای گزینش n آیتم از $A \cup B$ ، مشاهده می‌کنیم که می‌توانیم n آیتم را با انتخاب j آیتم از A و $n-j$ آیتم از B برگزینیم، در جایی که j هر عددی از ۰ تا n است. این کار می‌تواند به $a_j b_{n-j}$ روش انجام شود. جمع کردن همه مقادیر ممکن j مجموعی از

$$a_{\circ}b_n + a_{۱}b_{n-۱} + a_{۲}b_{n-۲} + \ldots + a_n b_{\circ}$$

روش برای انتخاب n آیتم از $A \cup B$ بدست می‌دهد. با توجه به قانون حاصل‌ضرب، این مشخصاً ضریب x^n در $A(x)B(x)$ است.

۳. ٤ انتخاب آیتم‌هایی با تکرار

اولین مسئله محاسباتی که مورد ملاحظه ما قرار گرفت تعداد راه‌هایی برای انتخاب یک دو جین دونات بود در صورتی که پنج طعم در دسترس باشند. می‌توانیم این پرسش را به شکل زیر تعمیم دهیم: به چند روش می‌توانیم n آیتم را از یک مجموعه k آیتمی برگزینیم اگر که برای انتخاب یک آیتم به دفعات مجاز باشیم؟

در این عبارت‌ها، مسئله دونات می‌پرسد که به چند روش می‌توانیم $n = ۱۲$ دونات را از مجموعه $k = ۵$ طعم انتخاب کنیم– {صاف و لعابزده و شکر و طعم لیمو و شوکولات} انتخاب کنیم.

جایی که، البته مجاز هستیم چندین دونانت از یک طعم انتخاب کنیم. بیایید از منظر تابع‌های مولد به این پرسش نزدیک شویم.

فرض کنید n آیتم را (با تکرار مجاز) از یک مجموعه حاوی یک آیتم تنها انتخاب کنیم.

سپس یک روش برای انتخاب صفر آیتم، یک روش برای انتخاب یک آیتم، یک روش برای انتخاب دو آیتم، والخ وجود دارد. بنابراین، تابع مولد برای گزینش n عضو با تکرار از یک مجموعه ۱ عضوی چنین است:

$$\langle ۱,۱,۱,۱,\ldots\rangle \leftrightarrow ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots$$

$$= \frac{۱}{۱ - x}$$

قانون تلفیق می‌گوید که تابع مولد برای انتخاب آیتم‌ها از یک اتحاد مجموعه جدا از هم عبارت از حاصل‌ضرب تابع‌های مولد برای گزینش آیتم‌ها از هر مجموعه است:

$$\underbrace{\frac{۱}{۱ - x}}_{\substack{\text{تابع مولد برای} \\ \{a۱\}}} \cdot \underbrace{\frac{۱}{۱ - x}}_{\substack{\text{تابع مولد برای} \\ \{a۲\}}} \cdots \underbrace{\frac{۱}{۱ - x}}_{\substack{\text{تابع مولد برای} \\ \{ak\}}} = \underbrace{\frac{۱}{(۱ - x)^K}}_{\substack{\text{تابع مولد برای} \\ \{a۱, a۲, \ldots, ak\}}}$$

بنابراین، تابع مولد برای گزینش آیتم‌هایی از یک مجموعه k– عضوی با تکرار مجاز عبارت است از $\frac{۱}{(۱ - x)^k}$.

حالا قانون کتاب‌دار به ما می‌گوید که تعداد روش‌های انتخاب n آیتم با تکرار از یک مجموعه k عضوی از این قرار است: $\binom{n+k-1}{n}$،

بنابراین، این ضریب x^n در گسترش سری $\frac{1}{(1-x)^k}$ است. از سوی دیگر، بدست آوردن این ضریب به صورت جبری آموزنده است، جایی که می‌توانیم با استفاده از قضیه تیلور آن را انجام دهیم:

قضیهٔ ۱. ٤ (قضیهٔ تیلور).

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

این قضیه می‌گوید که nامین ضریب متعلق به $\frac{1}{(1-x)^k}$ برابر است با nامین مشتق‌برداری در 0 و تقسیم شده در $n!$. و محاسبه nامین مشتق نیز که خیلی مشکلی نیست. به فرض که:

$$G(x)::=\frac{1}{(1-x)^k}=(1-x)^{-k}$$

آنگاه داریم:

$$G'(x)=k(1-x)^{-(k+1)}$$

$$G''(x)=k(k+1)(1-x)^{-(k+2)}$$

$$G'''(x)=k(k+1)(k+2)(1-x)^{-(k+3)}$$

$$G^{(n)}(x)=k(k+1)\ldots(k+n-1)(1-x)^{-(k+n)}$$

بنابراین، ضریب x^n در تابع مولد عبارت است از:

$$\frac{G^{(n)}(\circ)}{n!} = \frac{k(k+۱)\ldots(k+n-۱)}{n!}$$
$$= \frac{(k+n-۱)!}{(k-۱)!n!}$$
$$= \binom{n+k-۱}{n}.$$

بنابراین اگر از قبل قانون کتابدار را نمی‌شناختیم، می‌توانستیم با استفاده از تابع مولد آن را ثابت کنیم.

۵. یک مسئله محاسباتی "غیرممکن"

هر چه را تا کنون با تابع‌های مولد انجام داده‌ایم می‌توانستیم با روشی دیگر انجام دهیم. ولی اینجا با یک مسئله محاسباتی پوچ روبرو هستیم – براستی بالاتر از همه! به چند روش می‌توانیم یک سبد را با n میوه با محدودیت‌های زیر پر کنیم؟

- تعداد سیب ها باید زوج باشد.
- تعداد موزها باید مضروبی از ۵ باشد.
- حداکثر چهار پرتقال می‌تواند موجود باشد.
- حداکثر یک گلابی می‌تواند موجود باشد.

برای مثال، تعداد ۷ روش برای پر کردن سبدی با ۶ میوه وجود دارند:

سیب	۶	۴	۴	۲	۱	۰	۰
موز	۰	۰	۰	۰	۰	۵	۵
پرتقال	۰	۲	۱	۴	۳	۱	۰
گلابی	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱

این محدودیت‌ها به قدری پیچیده هستند که مسئله ناامید کننده به نظر می‌آید! ولی بیائید آنچه را که تابع‌های مولد آشکار می‌سازند ببینیم.

بیائید در ابتدا یک تابع مولد برای سیب‌های انتخابی بسازیم. می‌توانیم یک مجموعه ۰سیبی به یک روش، یک مجموعه ۱سیبی به صفر روش (از آنجا که تعداد سیب‌ها باید زوج باشد)، یک مجموعه ۲سیبی به یک روش، یک مجموعه ۳سیبی به صفر روش و به همین ترتیب انتخاب کنیم. بنابراین داریم:

$$A(x) = ۱ + x^{۲} + x^{۴} + x^{۶} + \ldots = \frac{۱}{۱ - x^{۲}}$$

به همین سان، تابع مولد برای گزینش موزها از این قرار است:

$$B(x) = ۱ + x^{۵} + x^{۱۰} + x^{۱۵} + \ldots = \frac{۱}{۱ - x^{۵}}$$

حالا، می‌توان یک مجموعه ۰پرتقالی را به یک روش، یک مجموعه ۱پرتقالی و به همین ترتیب انتخاب کنیم. با این همه، بیش از چهار پرتقال نمی‌توانیم انتخاب کنیم، بنابراین تابع مولد در اختیار ما:

$$O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

در اینجا داریم از فورمول حاصل‌جمع هندسی استفاده می‌کنیم. بالاخره، می‌توانیم صفر (هیچ) یا یک گلابی انتخاب کنیم، بنابراین داریم:

$$P(x) = 1 + x$$

قانون تلفیق می‌گوید که تابع مولد برای انتخاب از میان تمام چهار میوه چنین است:

$$A(x)B(x)O(x)P(x) = \frac{1}{1-x^2}\ \frac{1}{1-x^5}\ \frac{1-x^5}{1-x}\ (1+x)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

تقریباً همه چیزها می‌شود! ما با $1/(1-x)^2$ تنها گذاشته شدیم، که یک سری توانی است که پیش از این آن را پیدا کردیم. ضریب x^n به سادگی عبارت است از $n+1$. با این حساب، تعداد روش‌های پر کردن یک سبد با n میوه فقط $n+1$ است. این با مثالی که با آن تمرین کردیم سازگار است، از آنرو که ۷ سبد میوه مختلف با ۶ میوه در آن‌ها وجود داشت!