

(۱) معادلات پارامتری خطی را بنویسید که محل تلاقی دو صفحه $3x - 2y + 4z = 2$ و $2x + y - 3z = 13$ باشد.

(۲) وارون ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ را به روش الحاقی به دست آورید.

(۳) فرض کنید $\vec{R}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + t^2 \vec{k}$ ، مولفه های مماسی و قائم شتاب را تعیین کنید.

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

(۵) فرض کنید C دایره $x^2 + y^2 = 4$ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، انتگرال $\int y dx + xy dy$ را حساب کنید.

پاسخنامه تشریحی

جواب سوال (۱) سوال ساده حل در صفحات ۱۸۹ و ۱۹۰ کتاب درسی

جواب سوال (۲) سوال ساده حل در صفحات ۲۲۸ و ۲۲۹ کتاب درسی

جواب سوال (۳) حل در صفحات ۲۹۲ و ۲۹۳ کتاب درسی، جواب نهایی به صورت:

$$A_T(t) = \frac{\lambda t}{\sqrt{1 + \lambda t^2}}, \quad A_N(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda t^2}}$$

(در هر دو امتحان میان ترم این سوال بدون تغییر مطرح شده بود.)

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

جواب سوال (۴) داریم:

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزئی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2x + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3, -1 \end{cases}$$

(چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم $x = y$)

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(-1, -1)$ ، $(3, 3)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$$A = f_{xx} = 2, \quad B = f_{xy} = -2, \quad C = f_{yy} = 2y \Rightarrow \Delta = B^2 - AC$$

برای نقطه بحرانی $(3, 3)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times 6) = 4 - 12 = -8 < 0$ ، از طرفی داریم: $A = 2 > 0$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(-1, -1)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times -2) = 4 - 12 = 8 > 0$ ، لذا نقطه زین اسبی است.

(این سوال بدون تغییر سوال چهارم سوالات حل شده تاپی بود که به دانشجویان توصیه شده بود.)

جواب سوال (۵) با توجه به فرض C یک منحنی زردان است و $F = y dx + xy dy$ میدانی برداری است که بر $x^2 + y^2 = 4$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است و $x^2 + y^2 = 4$ دارای جهت استاندارد است در اینصورت

$$\begin{aligned} \oint_C y dx + xy dy &= \int \int_C \left(\frac{\partial xy}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int \int_C (y - 1) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r \sin \theta - 1) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \sin \theta - \frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin \theta - 2 \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos \theta - 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \left(-\frac{1}{2}(1) - 4\pi \right) - \left(-\frac{1}{2}(1) - 0 \right) = -4\pi \end{aligned}$$

(مشابه مثال حل شده در جزوه برای قضیه گرین که در کلاس درس توصیه شده بود.)