

(۱) هر کدام از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(۱) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \ln(e^{x+yz})$

(۲) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(۲) فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ باشد. مشتقات نسبی (جزئی) f_{xx}, f_{xy} را در نقطه $(0, 0)$ به دست بیاورید.

(۳) تابع u با معادله ای به شکل $u(x, y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ تعریف شده است. اولاً نشان دهید که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند، ثانیاً $G(x, y)$ را به دست آورید.

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u G(x, y)$$

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

(۵) دیفرانسیل کامل تابع زیر را به ازای $x = 1, y = 3, dx = 0.1, dy = -0.1$ محاسبه نمایید.

$$f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$$

(۶) ماکزیمم و مینی مم تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را به ازای $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ به دست آورید.

(۷) فرض کنید که ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ متقارن باشد. اولاً مقدار m, n را بیابید، ثانیاً $\det(A^T)$ را حساب کنید.

(۸) دستگاه سه معادله، سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ -x + 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

(۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار k را طوری بیابید که بردارهای $(0, k+2, 8), (2, k, -4), (1, -1, k-1)$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشند.

ب) اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ -x \\ 2x - 5y \end{bmatrix}$ یک تابع خطی باشد، ماتریس نمایشگر آن را بیابید.

http://aoujbag.sub.ir	http://rayeshmand.ir
وبسایت شخصی جعفر اوج بگ	رایشمند مرجع تخصصی ریاضی

جواب سوال ۱)

$$(۱) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \ln(e^{x+yz}) = \ln(e^{1+(0 \times 1)}) = \ln e = 1$$

$$(۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

اگر نقطه را مستقیماً جایگذاری نماییم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ به دست می آید. کافیت از تبدیل زیر استفاده کنیم:

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta) \text{ می کند } r \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است لذا این حد وجود ندارد.

جواب سوال ۲)

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 + 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 1 \\ f_x(x,y) &= \begin{cases} \frac{2x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ f_{xx}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

جواب سوال ۳)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{xy - y(x+y)}{x^2 y^2} = yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{xy - y(x+y)}{x^2 y^2} = xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \end{aligned}$$

در معادله قرار می دهیم؛ داریم:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \left(yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \right) - y^2 \left(xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \right) = \underbrace{xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)}_{G(x,y)} (x-y) = u G(x,y)$$

چون $u \neq 0$ لذا $G(x,y) = x - y$ می باشد.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 - 3y$$

جواب سوال ۴)

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزئی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2x + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3, -1 \end{cases} \quad (x = y \text{ قرار می دهیم})$$

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(3,3)$ ، $(-1,-1)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$$A = f_{xx} = 2, B = f_{xy} = -2, C = f_{yy} = 2y \Rightarrow \Delta = B^2 - AC$$

برای نقطه بحرانی $(3,3)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times 6) = 4 - 12 = -8 < 0$

برای نقطه بحرانی $(-1,-1)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times -2) = 4 - 12 = 8 > 0$ ، لذا نقطه زین اسبی است.

جواب سوال ۵) دیفرانسیل کامل تابع دومتغیره f را با df نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow df = \left(1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

لذا با جایگذاری مقادیر $x=1, y=3, dx=0.1, dy=-0.1$ خواهیم داشت: $df = 0.06$.

جواب سوال ۶) بنا به فرض مساله داریم: $0 = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1$ ، $g(x,y) = x^2 + y^2$ ، $f(x,y) = x^2 + y^2$ ، لذا تابع لاگرانژین و به تبع آن دستگاه لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \right), \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{4} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y + \frac{\lambda}{3} = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{6} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

با جایگذاری x, y در معادله سوم، مقدار $\lambda = -\frac{72}{13}$ به دست می آید. با جاگذاری مقدار λ خواهیم داشت:

$$x = \frac{72}{52}, \quad y = \frac{72}{78} \Rightarrow f\left(\frac{72}{52}, \frac{72}{78}\right) = \frac{36}{13}$$

جواب سوال ۷) با توجه به اینکه ماتریس متقارن است لذا به ازای هر $i, j = 1, 2, 3$ خواهیم داشت: $a_{ij} = a_{ji}$. لذا در ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n+1=4, \quad m-1=0 \Rightarrow n=3, \quad m=1$$

می دانیم در ماتریس های متقارن $A = A^T$ است، لذا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A^T) = 2 \times ((-1 \times 3) - 0) - 1 \times ((1 \times 3) - 0) + 4 \times ((1 \times 0) - (-1 \times 4)) = 7$$

جواب سوال ۸) ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل و سپس با عملیات سطری مقدماتی به ماتریس قطری تبدیل می کنیم:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow x=3, y=-2, z=2$$

(نوشتن مراحل تبدیل ماتریس در امتحان الزامی است)

$$\text{جواب ۹-الف)} \text{ با اعمال شرط استقلال خطی، یعنی } \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k-1 \\ 2 & k & -4 \\ 0 & k+2 & -8 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ خواهیم داشت: } 2k^2 - 2k - 12 \neq 0 \text{ لذا برای اینکه بردارها مستقل}$$

خطی باشند بایستی k ریشه معادله درجه دوم به دست آمده نباشد. پس ریشه های معادله درجه دوم فوق را به دست می آوریم: $k = 3, -2$ بنابراین به ازای $k \neq 3, -2$ بردارها مستقل خطی هستند.

جواب ۹-ب) پایه های استاندارد $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ در $\mathbb{R}^2$ و $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ در $\mathbb{R}^3$ را در نظر می گیریم. لذا تصویر پایه B_1 تحت f را برحسب پایه B_2 می نویسیم.

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (2 \times 0) \\ -1 \\ (2 \times 1) - (5 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 0) + (2 \times 1) \\ 0 \\ (2 \times 0) - (5 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{دقت کنید که ضرایب ستون های ماتریس را تشکیل می دهند.} \quad \text{ماتریس نمایشگر} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

با آرزوی موفقیت و شادکامی / اوج بگ / پاییز ۱۳۹۲